



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

ISAC ITIEL DE OLIVEIRA XAVIER

**COMPARAÇÃO DA CALIBRAÇÃO PROPOSTA PELO MÉTODO ITERATIVO DO
GRADIENTE HIDRÁULICO EM PROBLEMAS COM E SEM ZONEAMENTO:
ANÁLISE DA SENSIBILIDADE DO MODELO À CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA
DE ENTRADA NO UFC-MIGH**

JUAZEIRO DO NORTE/ CEARÁ

2026

ISAC ITIEL DE OLIVEIRA XAVIER

COMPARAÇÃO DA CALIBRAÇÃO PROPOSTA PELO MÉTODO ITERATIVO DO
GRADIENTE HIDRÁULICO EM PROBLEMAS COM E SEM ZONEAMENTO:
ANÁLISE DA SENSIBILIDADE DO MODELO À CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA DE
ENTRADA NO UFC-MIGH

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Engenharia Civil da Universidade
Federal do Cariri, como requisito parcial à
obtenção do título de Bacharelado em
Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Lacerda
Tavares.

JUAZEIRO DO NORTE

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

- X3c Xavier, Isac Itiel de Oliveira.
 Comparação da calibração proposta pelo método iterativo do gradiente
 hidráulico em problemas com e sem zoneamento: análise da sensibilidade do
 modelo à condutividade hidráulica de entrada no UFC-MIGH / Isac Itiel de Oliveira
 Xavier. – 2026.
 75 f. : il. color
- Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Centro de Ciências e Tecnologia,
 Curso de Bacharelado em Engenharia Civil, Universidade Federal do Cariri, Juazeiro
 do Norte, CE, 2026.
- Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Lacerda Tavares.
1. Engenharia civil. 2. Hidráulica aplicada - Fluxo subterrâneo - Aquíferos.
 3. Condutividade hidráulica - Método Iterativo do Gradiente Hidráulico (MIGH).
 4. Calibração de modelos numéricos - Análise de sensibilidade - Teste de Kruskal-
 Wallis. I. Tavares, Paulo Roberto Lacerda (Orient.). II. Universidade Federal do
 Cariri. III. Título.

CDD 624.15132

**COMPARAÇÃO DA CALIBRAÇÃO PROPOSTA PELO MÉTODO ITERATIVO DO
GRADIENTE HIDRÁULICO EM PROBLEMAS COM E SEM ZONEAMENTO:
ANÁLISE DA SENSIBILIDADE DO MODELO À CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA
DE ENTRADA NO UFC-MIGH**

Monografia apresentada ao curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Cariri como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Nome do Aluno

Monografia aprovada em: ____/____/____

BANCA EXAMINADORA

Orientador: _____
Prof. Paulo Roberto Lacerda Tavares, D.Sc. (UFCA)

1º Examinador: _____
Nome do Examinador, Titulação, (Instituição)

2º Examinador: _____
Nome do Examinador, Titulação, (Instituição)

AGRADECIMENTOS

A Deus pertence toda a honra e glória. “Ó profundidade da riqueza da sabedoria e do conhecimento de Deus! Quão insondáveis são os seus juízos, e inescrutáveis os seus caminhos! ‘Quem conheceu a mente do Senhor? Ou quem foi seu conselheiro?’ ‘Quem primeiro lhe deu, para que ele o recompense?’ Pois dele, por ele e para ele são todas as coisas. A ele seja a glória para sempre! Amém” (Romanos 11:33-36). Não há, portanto, nenhum outro que deva receber louvor. Foi Ele quem criou o mundo e proporcionou a salvação em Cristo! A Ele devo minha devoção.

Aos meus pais pelo cuidado ao longo de todos os dias da minha vida, pela insistência apesar dos meus erros, pelo esforço em proporcionar educação de qualidade em âmbito social, escolar e espiritual e pelo amor que, como foi demonstrado na prática diariamente, é o elo perfeito.

Às minhas irmãs, namorada e cunhado que são motivos da minha gratidão a Deus nas orações pela manhã: são um escape dos dias estressantes, me proporcionando alegria e companhia e são os espectadores das brincadeiras que faço e das piadas que conto.

À Igreja, corpo de Cristo, que foi auxílio nos dias difíceis e paz nos dias bons.

Aos amigos que, como fieis companheiros, viraram noites comigo em ligação terminando trabalhos, preocuparam-se com a iminência das provas, e sentiram o alívio de terminar um semestre puxado. Foi muito bom ver o desenvolvimento de cada um.

Ao professor Dr. Paulo Roberto que me acompanhou desde o quarto semestre do curso na disciplina de “Hidráulica Aplicada” e partir daí se tornou um tutor e conselheiro. Fui seu monitor, orientando de pesquisa, aluno de disciplinas optativas e agora orientando de TCC. Sua disciplina, empolgação e serenidade são exemplares.

Aos demais professores do curso, também, que, como docentes foram notórios, mas como exemplo de inteligência, disciplina e admiração foram memoráveis. Cada lampejo de genialidade no desenvolvimento de equações, resolução de questões e respostas de dúvidas brilharam meus os olhos, como aluno e entusiasta do conhecimento. Obrigado pelas dúvidas tiradas, pelo sorriso de todos os dias e pelo inestimável conhecimento compartilhado.

RESUMO

A calibração de modelos numéricos de fluxo subterrâneo é uma etapa essencial para a gestão dos aquíferos. No entanto, a dependência do método aos dados de entrada da condutividade hidráulica pode trazer subjetividade e incerteza ao modelo. Este trabalho visa, portanto, analisar o impacto de diferentes valores de condutividade hidráulica de entrada no UFC-MIGH. Para tal, usando como base um modelo hipotético, foram feitos cinco processos de calibração com dados de entrada que variaram da homogeneidade até uma região com cinco zonas distintas de condutividade hidráulica. A sensibilidade e convergência foram avaliadas a partir da raiz do erro quadrático médio, do ângulo médio entre os vetores formados pelos gradientes das cargas hidráulicas calculadas e observadas, por uma análise estatística descritiva e outra não paramétrica. Os resultados revelaram respostas distintas entre os indicadores: a RMSEH foi minimizada no cenário sem zoneamento, ao passo que a média dos ângulos foi otimizada no cenário com cinco zonas. O coeficiente de variação da condutividade indicou quantidades equivalentes de células robustas e sensíveis aos dados de entrada. O teste de Kruskal-Wallis revelou que há diferenças significativas entre os grupos. A verificação do coeficiente de variação dos valores da carga hidráulica indicou baixa dispersão dos valores. Conclui-se, portanto, que o modelo do UFC-MIGH apresentou baixa sensibilidade aos valores de entrada de K e significativa sensibilidade do processo de calibração aos valores iniciais da condutividade hidráulica.

Palavras-chave: condutividade hidráulica, calibração, sensibilidade;

ABSTRACT

Calibration of numerical groundwater flow models is an essential stage for aquifer management. However, the dependency of the method on the input data of hydraulic conductivity can introduce subjectivity and uncertainty to the model. This work therefore aims to analyze the impact of different values of input hydraulic conductivity in the UFC-MIGH. For this purpose, using a hypothetical model as a basis, five calibration processes were performed with input data ranging from homogeneity to a region with five distinct zones of hydraulic conductivity. Sensitivity and convergence were evaluated using the root mean square error, the average angle between the vectors formed by the gradients of calculated and observed hydraulic heads, through descriptive and non-parametric statistical analysis. The results revealed distinct responses among the indicators: the RMSEH was minimized in the scenario without zoning, while the average angle was optimized in the scenario with five zones. The coefficient of variation of conductivity indicated equivalent quantities of robust and sensitive cells to the input data. The Kruskal-Wallis test revealed significant differences between the groups. Verification of the coefficient of variation of the hydraulic head values indicated low dispersion of the values. It is concluded, therefore, that the UFC-MIGH model showed low sensitivity to the input values of K and significant sensitivity of the calibration process to the initial values of hydraulic conductivity.

Keywords: hydraulic conductivity, calibration, sensitivity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação física da equação de conservação de massa	18
Figura 2 – Esboço do experimento de Darcy	19
Figura 3 – Combinações entre anisotropia e heterogeneidade	23
Figura 4 – Notação de diferenças finitas para nós espaçados de forma irregular em uma dimensão	27
Figura 5 - Discretização de um aquífero hipotético para escoamento bidimensional	28
Figura 6 - Discretização de um aquífero hipotético em escoamento tridimensional	28
Figura 7 – Fluxograma MIGH.....	36
Figura 8 – Caso hipotético de estudo	38
Figura 9 – Interface PMWIN.....	40
Figura 10 - Cadastro condutividade (passo 1).....	41
Figura 11 – Cadastro condutividade (passo 2)	42
Figura 12 – Zoneamento inicial para primeira calibração.....	43
Figura 13 – Zoneamento inicial para segunda calibração	43
Figura 14 – Zoneamento inicial para terceira calibração	44
Figura 15 – Zoneamento inicial para quarta calibração	44
Figura 16 – Zoneamento inicial para quinta calibração	45
Figura 17 – Interface UFC-MIGH.....	45
Figura 18 – Interface Real Statics	49
Figura 19 – Interface Real Statics	49
Figura 20 – RMSEH do caso 1.....	50
Figura 21 – Média dos ângulos das cargas do caso 1.....	51
Figura 22 – RMSEH do caso 2.....	52
Figura 23 – Média dos ângulos das cargas do caso 2.....	52
Figura 24 – RMSEH do caso 3.....	53
Figura 25 – Média dos ângulos das cargas do caso 3.....	53
Figura 26 – RMSEH do caso 4.....	54
Figura 27 – Média dos ângulos das cargas do caso 4.....	55
Figura 28 – RMSEH do caso 5.....	56
Figura 29 – Média dos ângulos das cargas do caso 5.....	56
Figura 30 – K20, caso 1.....	58
Figura 31 – Distribuição percentual K20, caso 1	58
Figura 32 – K20, caso 2.....	59
Figura 33 – Distribuição percentual K20, caso 2	59
Figura 34 – K20, caso 3.....	61
Figura 35 – Distribuição percentual K20, caso 4	61
Figura 36 – K20, caso 4.....	62
Figura 37 – Distribuição percentual K20, caso 4	62
Figura 38 – K20, caso 5.....	64
Figura 39 – Distribuição percentual K20, caso 5	64
Figura 40 – K20, média dos casos.....	65
Figura 41 – Distribuição percentual K20, média dos casos	65
Figura 42 – Coeficiente de variação dos casos.....	67
Figura 43 – Distribuição percentual coeficiente de variação	67
Figura 44 – Coeficiente de variação da carga hidráulica dos casos	70
Figura 45 – Distribuição percentual coeficiente de variação	70

LISTA DE TABELA

Tabela 1 - Cargas hidráulicas em poços do exemplo hipotético	39
Tabela 2 – Resumo da RMSEH e da média dos ângulos em cada caso	57
Tabela 3 – Resumo distribuição percentual dos intervalos dos valores de condutividade hidráulica	68
Tabela 4 – Resultado Kruskal-Wallis	68
Tabela 5 – Resultado post-hoc Dunn.....	69

LISTA DE VARIÁVEIS E DIMENSÕES

η : porosidade [L^3L^{-3}];

V_v : volume de vazios [L^3];

V : volume total [L^3];

η_e : porosidade efetiva [L^3L^{-3}];

V_D : volume de vazios efetivo [L^3];

v : vazão específica ou velocidade aparente [LT^{-1}];

ρ : densidade do fluido [ML^{-3}];

h : carga hidráulica [L];

z : cota [L];

Q : vazão constante [L^3T^{-1}];

L : distância [L];

K : condutividade hidráulica [LT^{-1}];

A : área da seção transversal [L^2];

∇h : o gradiente de carga hidráulica [LL^{-1}];

S_s : armazenamento específico [L^{-1}];

g : aceleração da gravidade [LT^{-2}];

α : compressibilidade do meio poroso [$M^{-1}LT^2$];

β : compressibilidade da água [$M^{-1}LT^2$];

p : pressão [$ML^{-1}T^{-2}$];

R_v ou q : fluxo por unidade de volume [T^{-1}];

R: o domínio do fluxo;

L: função lagrangeana;

λ : multiplicador lagrangeano;

T: transmissividade [L^2T^{-1}];

B: região que descreve as condições de contorno;

r_i : subdomínio de R;

N: quantidade de subdomínios em R;

W: quantidade de células ativas;

s: desvio padrão;

CV: coeficiente de variação;

C: número de observações;

k: número de grupos;

n_i : número de observações do grupo “i”;

$R_{med,i}$: média das posições do grupo “i”;

R_{med} : média das posições gerais;

SUMÁRIO

Sumário

1 INTRODUÇÃO.....	13
1.1 APRESENTAÇÃO.....	13
1.2 PROBLEMÁTICA	14
1.2 OBJETIVOS.....	14
1.2.1 <i>Objetivo geral</i>	14
1.2.2 <i>Objetivos específicos</i>	15
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
2.1 ÁGUAS SUBTERRÂNEAS	16
2.2 EQUAÇÃO DE FLUXO SUBTERRÂNEO.....	17
2.3 HETEROGENEIDADE E ANISOTROPIA DA CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA	22
2.4 MODELAGEM COMPUTACIONAL.....	23
2.4.1 <i>Fluxo da modelagem numérica</i>	24
3 METODOLOGIA	38
3.1 ETAPAS METODOLÓGICAS.....	38
3.1.1 <i>Definição do propósito do modelo</i>	38
3.1.2 <i>Elaboração do modelo conceitual e formulação do modelo matemático</i>	38
<i>Fonte: Autor (2026)</i>	40
3.1.3 <i>Tradução do modelo matemático para o modelo numérico</i>	40
3.1.4 <i>Calibração</i>	45
3.1.5 <i>Validação</i>	46
4 RESULTADOS.....	50
4.1 RESULTADOS DAS CALIBRAÇÕES	50
4.1.1 <i>Caso 1</i>	50
<i>Os resultados apresentam estabilidade e tendência assintótica para o erro mínimo absoluto.</i>	51
4.1.2 <i>Caso 2</i>	51
<i>Os resultados apresentam estabilidade e tendência assintótica para o erro mínimo absoluto, em especial.</i>	52
4.1.3 <i>Caso 3</i>	53
<i>Os resultados apresentam estabilidade e tendência assintótica para o erro mínimo absoluto.</i>	54
4.1.4 <i>Caso 4</i>	54
<i>Os resultados apresentam estabilidade e tendência assintótica para o erro mínimo absoluto.</i>	55
4.1.5 <i>Caso 5</i>	55
<i>Os resultados apresentam estabilidade e tendência assintótica para o erro mínimo absoluto.</i>	56
4.1.6 <i>Resumo</i>	57
4.2 VALORES DE K E ANÁLISE DA MÉDIA E COEFICIENTE DE VARIAÇÃO	57
4.2.1 <i>Caso 1</i>	57
4.2.2 <i>Caso 2</i>	59
4.2.3 <i>Caso 3</i>	60
4.2.4 <i>Caso 4</i>	62
4.2.5 <i>Caso 5</i>	63
4.2.6 <i>Média e coeficiente de variação</i>	65
4.2.6 <i>Resumo</i>	68
4.3 TESTE DE KRUSKAL-WALLIS E POST-DOC DE DUNN	68
4.4 VALORES DA CARGA HIDRÁULICA	69
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	71

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação

Os recursos hídricos têm significativa presença no desenvolvimento da existência humana. Segundo Madureira (2015), ao longo do tempo, as cidades históricas se desenvolveram à margem de cursos d'água. Tal relação ainda é preponderante nos dias de hoje em virtude do uso da água doce na irrigação, abastecimento humano e indústria. Não obstante, espera-se que a disponibilidade hídrica doce superficial diminua em contraste com o aumento da dependência das águas subterrâneas, devido às mudanças climáticas e à previsão de aumento no uso da água – 35% ao fim de 30 anos (UNESCO, 2022).

Rebouças (2006, *apud* Villar, 2016), cita outros fatores que justificam o aumento no uso dos mananciais subterrâneos, os quais são: avanços da hidrogeologia e das técnicas de perfuração de poços, redução dos custos de extração, menor suscetibilidade climática e a qualidade das águas hipógeas. O fator mais relevante, no entanto, é o da abundância deste recurso. Conforme UNESCO (2022), as águas subterrâneas representam 99% de toda a água doce líquida da Terra. Além disso, num cenário nacional, tal recurso também é farto pois o Brasil é detentor de aproximadamente 12% das águas doces do planeta (REBOUÇAS, 2006).

Esse uso intensivo, conforme Back (2020), promove a exploração de volumes de água que excedem a recarga natural e, conseqüentemente, acabam reduzindo a disponibilidade hídrica, gerando alterações no escoamento básico dos rios, secando as nascentes, diminuindo os níveis mínimos dos reservatórios, afundando terrenos, propagando a contaminação da água, impactando a biodiversidade e, até, exaurindo completamente o aquífero.

Conforme destaca Gilbert F. Hounsgbo, diretor da ONU-Água, no Relatório Mundial das Nações Unidas sobre o Desenvolvimento da Água 2022 (UNESCO, 2022), aprimorar a forma como se administra as águas subterrâneas é uma necessidade preeminente para atingir-se os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS). Para tal, um dos maiores dilemas, segundo Back (2020), é o alinhamento da percepção da relevância que a água subterrânea tem em âmbito social e econômico com a escassez na ciência de informações sobre o potencial de uso do aquífero. Tal desconhecimento de dados inere, principalmente, ao conhecimento de parâmetros hidrogeológicos que conduzem o escoamento subterrâneo, como a condutividade hidráulica e a recarga.

À vista disso, faz-se mister trazer à tona medidas que proporcionem ciência das características e dinâmica dos aquíferos, principalmente sobre a condutividade hidráulica. Com

esta, é possível conhecer o gradiente hidráulico, que por sua vez confere intensidade, direção e sentido para o escoamento subterrâneo.

Busca-se, portanto, avaliar o modelo através da comparação da precisão do MIGH em problemas com e sem zoneamento a fim de avaliar se os diferentes valores de condutividade hidráulica horizontal (zoneamento – situação mais comum na vida prática) influenciam o resultado final do problema.

1.2 Problemática

Devido à natureza “invisível” dos recursos hídricos hipógeos, e dada à complexidade imprópria de simular o escoamento subterrâneo em laboratório para conhecimento dos parâmetros hidrogeológicos, surge a necessidade de descrever o fenômeno computacionalmente e simulá-lo através do processo de modelagem numérica.

Segundo Back (2020), através da modelagem computacional, são calculados os fenômenos de fluxo e de transporte de um sistema de aquífero, do mesmo modo que, estampadas as relações complexas entre as entradas, saídas e mudanças no armazenamento e movimento da água.

Para Tavares (2010), a modelagem computacional é uma simplificação de fenômenos reais, cuja etapa de destaque é a calibração de parâmetros hidrodinâmicos que, devido à complexidade das informações e dos métodos matemáticos inerentes, prioriza-se por ser feita através de automatizações digitais em detrimento do método da tentativa e erro. Uma dessas automatizações é o método iterativo do gradiente hidráulico (MIGH) que, resumidamente, minimiza o erro entre valores de gradiente hidráulico observado em campo e fixado nas iterações e os valores calculados a partir das iterações. O método se prova bem-sucedido quando a convergência, estabilidade e consistência são garantidos.

Todavia, vale lembrar, que apesar do método gerar confluência numérica, não há garantia de que os valores sejam respostas absolutas, ou seja, há a possibilidade de que o resultado seja uma boa resposta matemática, mas não tenha nenhum significado físico. Para tal, é importante validar o modelo numérico para extinguir a possibilidade de que a resposta retornada pelo tal seja conveniente e não contribua para a solução do problema real que é o desconhecimento do escoamento subterrâneo.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral do trabalho é avaliar a sensibilidade do método iterativo do gradiente

hidráulico em problemas com e sem zoneamento da condutividade hidráulica horizontal.

1.2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos do trabalho são:

- a) Avaliar, comparativamente, o valor mínimo da raiz do erro quadrático médio e do ângulo “ ϕ ” entre os valores de carga hidráulica observada e calculada na calibração da condutividade hidráulica em uma, duas, três, quatro e cinco zonas de condutividade horizontal;
- b) Analisar descritivamente, através da média e do coeficiente de variação, os casos de uma, duas, três, quatro e cinco zonas de condutividade horizontal;
- c) Analisar, não parametricamente, se as diferentes calibrações de entrada confluem para os mesmos valores na iteração final;
- d) Verificar influência que os valores de “K” tem no resultado final da carga hidráulica;

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Águas subterrâneas

O termo água subterrânea é, habitualmente, separado para indicar a água subsuperficial que se encontra abaixo do nível freático em solos e formações geológicas que estão completamente saturados. (FREEZE e CHERRY, 2017).

No campo da hidrogeologia surge prontamente o termo “aquífero”. Ainda segundo Freeze e Cherry (2017), o termo em questão é utilizado desde grupos de formações geológicas, passando por formações geológicas completas e até para formações geológicas individuais.

Feitosa *et al.* (2008) cita que as águas subterrâneas que se encontram em solos formam aquíferos do tipo livre, rasos e muito vulneráveis a contaminação. Os mesmos autores ainda citam que, nas bacias sedimentares existem:

- Aquíferos: Formação que contém água e permite fluxo em seu interior. Areias e arenitos são exemplos de aquíferos. Freeze e Cherry (2017) definem aquífero como uma unidade geológica, permeável, saturada e que pode propagar quantidades relevantes de água sob gradientes hidráulicos comuns;
- Aquitardos: Formação rochosa compostos por sequências alternadas de siltes/siltitos ou por variações entre argilas, siltes/siltitos e arenitos finos. Feitosa *et al.* (2008) desenvolve a ideia relatando que o aquitardo é uma camada ou formação semipermeável, cujos limites no topo e na base são camadas com permeabilidade muito maior, funcionando como uma membrana semipermeável que se comporta como filtro. O fluxo de água, portanto, é mais lento e tardio. Freeze e Cherry (2017), por sua vez, definem os aquitardos como camadas menos permeáveis de uma sequência estratigráfica;
- Aquicludes: Rochas sedimentares sujeitas a fortes processos de compactação/ cimentação ou diagênese. O fluxo, portanto, é praticamente nulo. Seguindo o desenvolvimento da ideia de Feitosa *et al.* (2008), o aquiclude pode até conter água em quantidades significativas, mas é inapto para propagá-la em condições naturais. Freeze e Cherry (2017) discorre que há pouquíssimas formações que se enquadram na definição de aquiclude, por isso, a utilização de seu termo é subvalorizada;
- Aquífugo: Formações impermeáveis que não armazenam e nem transmitem água.

Apesar de acadêmicas, na prática, essas definições são pouco precisas. FREEZE; CHERRY (2017, p. 53) afirmam que:

As definições de aquífero e aquitarde são propositalmente imprecisas em relação à condutividade hidráulica. Isso deixa em aberto a possibilidade de utilizar esses termos de forma relativa. Por exemplo, em uma sequência intercalada de areia-silte, os siltes

podem ser considerados aquíferos, enquanto que, em um sistema silte-argila, os siltes são aquíferos.

Outra característica de importante conhecimento é o da pressão da água nas superfícies limítrofes do aquífero e da capacidade de transmissão de água nessas respectivas camadas. Feitosa *et al.* (2008) descreve que um aquífero é confinado quando a pressão no seu topo é maior do que a pressão atmosférica, podendo ser do tipo confinado não drenante quando suas superfícies limítrofes (inferior e superior) são impermeáveis; e drenante, quando pelo menos uma de suas superfícies limítrofes é permeável. Freeze e Cherry (2017) citam que um aquífero confinado é um aquífero limitado por dois aquíferos, e, no geral, ocorrem em profundidade.

Já um aquífero livre, segundo Feitosa *et al.* (2008), tem todos os pontos sob pressão atmosférica e seu limite superior é a superfície de saturação. Estes, ainda de acordo com o mesmo autor, podem ser drenantes, para o caso de possuírem base semipermeável ou não drenantes, para o caso de possuírem base impermeável. Freeze e Cherry (2017) citam que um aquífero livre é mais propenso a ocorrer perto da superfície.

2.2 Equação de fluxo subterrâneo

Conforme Carvalho (2013), há duas formas de expressar quantitativamente o fluxo subterrâneo com base em dados coletados no campo: os métodos analíticos e numéricos. Os métodos analíticos buscam resolver o problema do escoamento subterrâneo de forma exata por meio de manipulações algébricas e equações fechadas; na medida em que traz uma solução precisa matematicamente falando, necessita de muitas simplificações para que tal solução seja viável. Os métodos numéricos, por sua vez, contam com soluções mais palpáveis dada a complexidade dos fenômenos de escoamento; a solução para o caso é aproximada e sua precisão depende da validade do modelo e do refinamento computacional. Em comum, ambos os métodos possuem a busca pela resolução da equação geral de fluxo subterrâneo. Esta equação é advinda da equação da continuidade e da equação de Darcy na sua forma geral.

Feitosa *et al.* (2008) diz que a equação da continuidade – que afirma que a água não pode ser criada e nem destruída, apenas transportada – é descrita na equação 1:

$$\frac{\partial \eta \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \eta \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \eta \rho v_z}{\partial z} = - \frac{\partial \eta \rho}{\partial t} \quad (1)$$

Ou na sua notação simplificada, conforme a equação 2:

$$\text{div} (\eta \rho \mathbf{v}) = - \frac{\partial \eta \rho}{\partial t} \quad (2)$$

Em que:

div: operador divergente;

v : vazão específica [LT^{-1}];

ρ : densidade do fluido [ML^{-3}];

η : porosidade do meio (relativa ao solo/rocha) [L^3L^{-3}], isto é, fração do volume total do solo/rocha composta por vazios. Freeze e Cherry (2017) indicam que a porosidade pode ser um controlador da condutividade hidráulica. Feitosa *et al.* (2008) afirma que a porosidade é definida matematicamente pela equação 3:

$$\eta = 100 \frac{V_v}{V} \quad (3)$$

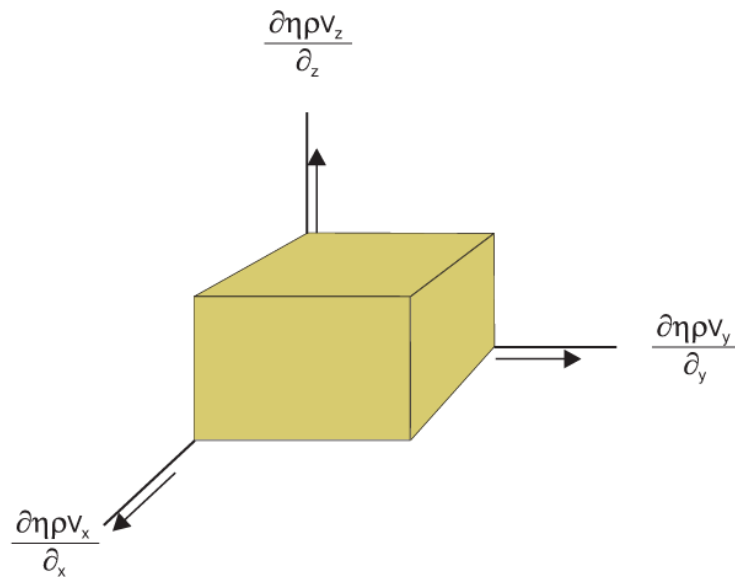
Sabendo que: “ V_v ” é o volume de vazios (poros) do solo/rocha [L^3]; e “ V ” é o volume total [L^3]. Tavares (2010) ainda cita que, dada a existência de forças moleculares que impedem a extração total do fluido, é necessário usar o conceito de porosidade efetiva, descrito na equação 4:

$$\eta_e = 100 \frac{V_D}{V} \quad (4)$$

No qual: “ η_e ” é a porosidade efetiva [L^3L^{-3}], isto é, a parte do volume total do solo/rocha que é ocupada por poros/vazios onde o fluido pode fluir; “ V_D ” é o volume de água drenada por gravidade [L^3]; e “ V ” é o volume total [L^3].

A compreensão física da equação acima pode ser facilitada com o auxílio da figura 1:

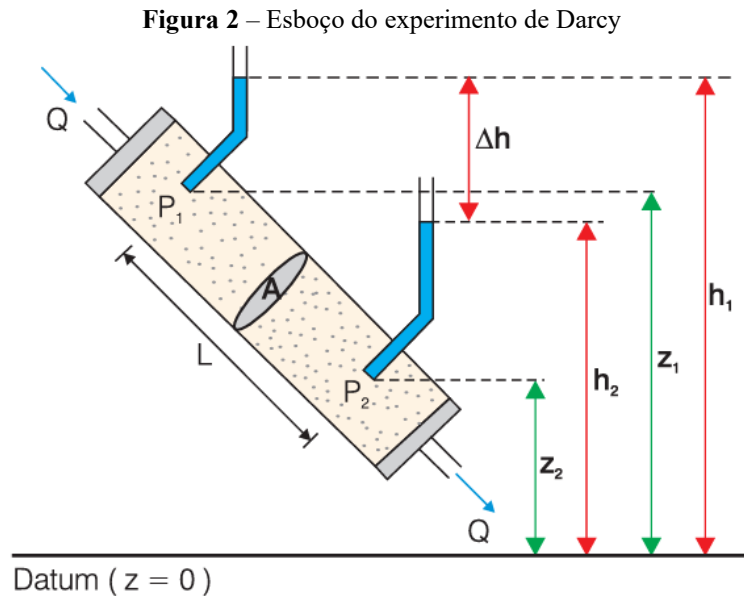
Figura 1 - Representação física da equação de conservação de massa



Fonte: Feitosa *et al.* (2008, p.85)

A percepção física da equação da continuidade remete a ideia de que a variação na densidade e porosidade do fluido no tempo está relacionada com o fluxo do fluido. Este por sua vez diz respeito à variação de densidade do fluido e de porosidade do meio.

Já a equação de Darcy resulta de um experimento feito por Henry Darcy que se generalizou na lei empírica que leva seu nome (FREEZE e CHERRY, 2017). Conforme Feitosa *et al.* (2008), o experimento seguiu a seguinte linha de raciocínio descrita abaixo na figura 2:



Fonte: Feitosa *et al.* (2008, p.78)

Em que:

h_1 : carga hidráulica no piezômetro 1 [L];

h_2 : carga hidráulica no piezômetro 2 [L];

z_1 : cota do ponto P_1 (piezômetro 1) [L];

z_2 : cota do ponto P_2 (piezômetro 2) [L];

Q : vazão constante que passa pelo cilindro [L^3T^{-1}]

Δh : variação da carga hidráulica entre os piezômetros 1 e 2 [L];

L : distância entre os piezômetros 1 e 2 [L].

A lei empírica de Darcy pode, então, ser expressa na equação 5:

$$Q = -KA \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (5)$$

Em que:

Q : vazão constante que passa pelo cilindro [L^3T^{-1}];

K : condutividade hidráulica [LT^{-1}]. A condutividade hidráulica, ainda conforme Feitosa *et al.* (2008), leva em conta peculiaridade do meio, tais quais: porosidade, tamanho, distribuição, forma e arranjo das partículas; e as características do fluido que está em fluxo: viscosidade e massa específica;

A : área da seção transversal por onde passa o fluxo [L^2];

h_1 : carga hidráulica no piezômetro 1 [L];

h_2 : carga hidráulica no piezômetro 2 [L];

L: distância entre os piezômetros 1 e 2 [L].

Freeze e Cherry (2017) trazem à tona o conceito de vazão específica, definida pela equação 6:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{K \Delta h}{L} \quad (6)$$

Em que:

v: vazão específica [LT^{-1}]. Feitosa *et al.* (2008) lembra que apesar do parâmetro ter dimensão de velocidade, o mesmo não representa a velocidade real do fluxo, pois a seção considerada de área “A” é inerente a área total, incluindo além dos vazios e parte sólida que é um impeditivo de fluxo;

Q: vazão constante que passa pelo cilindro [L^3T^{-1}];

A: área da seção transversal por onde corre o fluxo [L^2].

Ainda segundo Feitosa *et al.* (2008), a expressão descrita na equação 6, desenvolvida por Darcy pode ser generalizada para a equação 7:

$$v = -K \nabla h \quad (7)$$

Em que:

v: o vetor de velocidade aparente, formado por componentes em X, Y, [LT^{-1}];

K: o tensor de condutividade hidráulica [LT^{-1}];

∇h : o gradiente de carga hidráulica, um indicador de como varia a carga hidráulica ao longo de cada uma das direções [LL^{-1}].

Aplicando-se a lei de Darcy na sua forma generalizada na equação da continuidade, tem-se a equação 8:

$$-div (\eta \rho K \nabla h) = - \frac{\partial \eta \rho}{\partial t} \quad (8)$$

A porosidade é adimensional e tal qual a densidade do fluido, no geral, é constante no tempo. Além disso, levando em conta que o sistema não é fechado, há entrada e saída de massa no volume de controle que será descrito por R_v – taxa de recarga por unidade de volume [T^{-1}]. Por fim será desenvolvido o conceito de armazenamento específico e utilizar-se-á a regra da cadeia no segundo membro da equação.

O armazenamento específico, conforme Freeze e Cherry (2017), é descrito pela equação 9:

$$S_s = \rho g (\alpha + \eta \beta) \quad (9)$$

Em que:

S_s : armazenamento específico [L^{-1}];

ρ : densidade da fluido [ML^{-3}];

g : aceleração da gravidade [LT^{-2}];

α : compressibilidade do meio poroso [$M^{-1}LT^2$];

η : porosidade do meio [LL^{-3}];

β : compressibilidade da água [$M^{-1}LT^2$].

Para a equação de Bernoulli tem-se a equação 10:

$$h = z + \frac{p}{\rho g} \quad (10)$$

Em que:

h : carga hidráulica [L];

z : elevação [L];

p : pressão [$ML^{-1}T^{-2}$];

ρ : densidade da fluido [ML^{-3}];

g : aceleração da gravidade [LT^{-2}].

Portanto, com a variação diferencial de carga hidráulica (h), e desconsiderando-se a variação de elevação, ocorre a variação de pressão descrita na equação 11:

$$dh = - \frac{dp}{\rho g} \quad (11)$$

Reorganizando-se, há o que está contido na equação 12:

$$dp = \rho g dh \quad (12)$$

Tanto a água quanto, o meio poroso são compressíveis, por isso segue-se a equação 13 e 14:

$$d\rho = \rho \beta dp \quad (13)$$

$$d\eta = \eta \alpha dp \quad (14)$$

Derivando o produto, tem-se a equação 15:

$$d(\eta\rho) = \eta d\rho + \rho d\eta \quad (15)$$

Substituindo os termos equivalentes, tem-se as equações 16, 17 e 18:

$$d(\eta\rho) = \eta(\rho\beta dp) + \rho(\eta\alpha dp) \quad (16)$$

$$d(\eta\rho) = \eta\rho(\alpha + \beta) dp \quad (17)$$

$$\frac{d(\eta\rho)}{dh} = \eta\rho(\alpha + \beta) \rho g \quad (18)$$

Na definição da compressibilidade do meio poroso já está incluso a porosidade, portanto, tem-se a equação 19:

$$S_s = \frac{d(\eta\rho)}{dh} \quad (19)$$

Usando a regra da cadeia, para o segundo termo da equação da continuidade, constata-se a equação 20:

$$\frac{\partial\eta\rho}{\partial t} = \left(\frac{d(\eta\rho)}{dh} \right) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (20)$$

Logo, nota-se a equação 21:

$$\frac{\partial\eta\rho}{\partial t} = (S_s) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (21)$$

Por fim, a equação da continuidade toma a forma da equação 22:

$$\text{div} (K\nabla h) + R_v = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (22)$$

Levando em conta que os eixos cartesianos correspondem as direções principais do tensor de condutividade hidráulica K do meio poroso, Carvalho (2013) cita que a equação de fluxo subterrâneo é o que está descrito na equação 23:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} + R_v \quad (23)$$

Em que:

K_i : elementos da diagonal principal do tensor de condutividade [LT^{-1}];

h : carga hidráulica como função do espaço e tempo $h(x, y, z, t)$ [L];

S_s : armazenamento específico [L^{-1}];

R_v : fluxo por unidade de volume que entra ou sai do volume de controle [T^{-1}].

2.3 Heterogeneidade e anisotropia da condutividade hidráulica

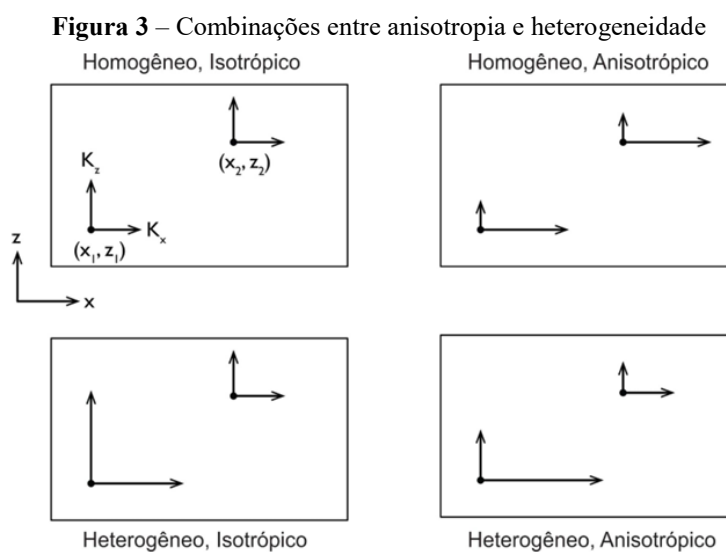
Segundo Freeze e Cherry (2017), a condutividade hidráulica, frequentemente, varia no espaço dentro da formação geológica – propriedade conhecida como heterogeneidade – e de acordo com a direção da medição em qualquer ponto da formação geológica – fenômeno chamado de anisotropia.

Para Feitosa *et al.* (2008), um aquífero é heterogêneo no caso de ser constituído por diferentes materiais. Freeze e Cherry (2017) desenvolvem este tema mostrando que, caso a condutividade hidráulica “ K ” seja dependente da posição da formação geológica, a formação é heterogênea, caso seja independente da posição, o caso é de homogeneidade. Os diferentes

valores de condutividade podem ser em camadas horizontais (heterogeneidade vertical) – caso comum pela formação superposta de camadas de diferentes materiais – ou em camadas verticais (heterogeneidade horizontal) – resultados comuns de processos de sedimentação formados em relevos inclinados.

Feitosa *et al.* (2008) define um aquífero como anisotrópico para o caso de a condutividade hidráulica ser diferente para cada uma das direções dos eixos coordenados. Uma das causas da anisotropia é o fato de inexistirem partículas perfeitamente esféricas que permitissem o fluxo em mesmas condições para qualquer uma das direções principais do tensor de condutividade hidráulica (K_x , K_y , K_z). Freeze e Cherry (2017) discorrem sobre este assunto mostrando que, caso a condutividade hidráulica “K” seja dependente da direção de medição num ponto da formação geológica, a formação é anisotrópica, do contrário, o isotrópico.

Para que haja precisão na descrição da natureza do coeficiente de proporcionalidade “K” é necessário, ainda conforme Freeze e Cherry (2017), a identificação de ambas as características: anisotropia e heterogeneidade. Tal entendimento pode ser facilitado pela figura 3:



Fonte: Freeze e Cherry (2017, p.56)

2.4 Modelagem computacional

Conforme Queiroz (2016), os modelos analíticos geram uma ou mais funções que representam as soluções da equação de fluxo para cada parâmetro dentro do domínio analisado. Desta forma, para calcular o fluxo de um aquífero diferente, resolve-se a mesma equação mudando apenas os parâmetros. Tendo em vista que a equação descrita no tópico acima não é linear e nem homogênea, suas soluções são, muitas vezes, complexas e em alguns casos de

impossível determinação exata. Outro problema que surge, é a excessiva dificuldade de determinação dos parâmetros hidráulicos que regem o escoamento subterrâneo.

Já as soluções numéricas consistem em discretizações locais para obtenção de soluções aproximadas. Segundo Righetto (1998 apud Queiroz, 2016) para um método numérico ser eficiente na solução de um problema, ele deve ser convergente, consistente e estável. Estável quando não há ampliação do erro de iteração em iteração, consistente e convergente quando as equações aproximadas tendem a equação original, e por sua vez a solução aproximada tende a solução exata.

Para aplicação dos métodos numéricos é realizada uma modelagem numérica, buscando-se descrever com precisão a realidade hidrogeológica em questão de acordo com uma representação matemática (CARVALHO, 2013).

Os métodos numéricos se apresentam com considerável vantagem sobre os métodos analíticos. Ainda conforme Carvalho (2013), os métodos numéricos são os únicos capazes de descrever de forma adequada os aquíferos nas suas condições mais complexas: anisotropia, heterogeneidade e transiência.

2.4.1 Fluxo da modelagem numérica

De acordo com Anderson, Woessner e Hunt (2015), as etapas para o desenvolvimento da modelagem numérica são: a definição do propósito do modelo, a elaboração do modelo conceitual, a formulação do modelo matemático, a tradução do modelo conceitual em modelo numérico, a calibração e a validação do modelo.

2.4.1.1 Definição do propósito do modelo

Ainda conforme Anderson, Woessner e Hunt (2015), nenhum modelo numérico tem o objetivo do seu propósito em si mesmo, pelo contrário, tais modelagens são utilizadas para previsão de efeitos futuros ou entendimento de eventos passados. No caso hidrogeológico, tal sina é confirmada. A definição de propósito do modelo tem proeminência fundamental pelo fato de que o alvo final determinará a complexidade dos dados trabalhados (anisotropia, heterogeneidade, transiência, tridimensionalidade) que, por sua vez, influencia a dificuldade no levantamento de dados (condições de contorno, carga hidráulica de poços), a calibração de parâmetros regentes do fluxo subterrâneo (condutividade hidráulica, recarga) e sua sensibilidade almejada.

2.4.1.2 Elaboração do modelo conceitual

Anderson, Woessner e Hunt (2015) definem um modelo conceitual de fluxo de águas subterrâneas como uma simplificação de um problema real de recursos hídricos subsuperficiais descrito matematicamente com as características essenciais do problema do mundo real. Segundo Kresic e Mikszewski (2013) a síntese do que se sabe sobre o local é um modelo conceitual.

Para Back (2020), a elaboração do modelo conceitual conta com a definição da geometria do sistema hidrogeológicos: suas camadas, contornos, interconexões e recargas. Nesse momento, é necessário a reunião de dados de campo para descrição do sistema hidrogeológicos e dos componentes do balanço hídrico. Tais dados são coletados em campo com o auxílio do sistema de informações geográficas (SIG). Para Anderson, Woessner e Hunt (2015), o SIG é uma ferramenta conveniente para armazenar, organizar e exibir dados que formam o modelo conceitual de um sistema de fluxo de águas subterrâneas. Ainda conforme os mesmos autores o SIG pode ser vinculado diretamente a um código de águas subterrâneas, como também pode interagir com códigos de águas subterrâneas.

As camadas do sistema hidrogeológicos podem indicar um sistema zoneado, isto é, regiões com diferentes valores de condutividade hidráulica horizontal ou vertical. Na elaboração do modelo é importante que tal etapa seja bem desenvolvida de forma a conduzir o estudo a resultados mais precisos e a um menor esforço computacional. Os contornos também devem ser bem observados uma vez que eles contribuem diretamente com complicações para elaboração do modelo conceitual. Citam-se dois exemplos: transiência gerada na zona de interface em contornos fluviais da bacia e valores inconclusivos em proximidades a contornos impermeáveis.

Por fim, é fulcral levantar os dados de recarga e descarga do aquífero estudado pois tal parâmetro é um termo da equação geral de fluxo subterrâneo.

2.4.1.3 Formulação do modelo matemático

Anderson, Woessner e Hunt (2015) defendem que o modelo matemático consiste em uma equação governante, condições de contorno e, para problemas transientes, condições iniciais.

A equação governante é a equação geral de fluxo subterrâneo – representação dos fenômenos que ocorrem dentro do aquífero (volume de controle). Sua complexidade varia conforme a precisão da descrição do fenômeno natural: quanto mais próximo do ideal, mais termos passíveis de soluções há e mais exigido será o modelo matemático.

De acordo com Back (2020), as condições de contorno são expressões matemáticas que representam os limites físicos do modelo e através delas se define o fluxo de escoamento que entra e sai do domínio da modelagem.

Para Anderson, Woessner e Hunt (2015), o contorno pode incluir características hidráulicas, como divisores de águas subterrâneas, e características físicas, como corpos d'água superficiais e rochas relativamente impermeáveis. Ainda segundo os mesmos autores, as condições de contorno, matematicamente, são divididas em três tipos: tipo 1, tipo 2 e tipo 3.

O tipo 1 diz respeito ao limite de carga especificado (condições de Dirichlet) onde a carga ao longo do limite possui um mesmo valor conhecido. Back (2020) afirma que tal condição representa grandes corpos d'água – rios, lagos, reservatórios e oceanos – que não sofrem variações devido variações de baixa magnitude no sistema, tais como, bombeamento ou alterações na taxa de recarga.

Anderson, Woessner, Hunt (2015) descrevem o tipo 2 como inerente ao limite de fluxo especificado (condições de Neumann) no qual a derivada da carga no contorno é especificada. Tal fluxo é calculado a partir da lei de Darcy. O limite de fluxo anódico é um caso especial de limite tipo 2 onde o fluxo através do contorno é zero. “Essa condição é usada para representar divisores de águas subterrâneas através do limite sem fluxo e recarga através do fluxo vertical com o lençol freático.” (BACK, 2020).

Por último, segundo Anderson, Woessner, Hunt (2015), o tipo 3 refere-se ao limite dependente de carga (condições de Cauchy) a partir de onde o fluxo através do limite é calculado a partir da lei de Darcy usando um gradiente calculado como a diferença entre uma carga externa ao contorno e a carga calculada pelo modelo no nó localizado no limite ou suficientemente próximo a ele. “Essa condição pode representar [...] o fluxo vertical de e para riachos, lagos, zonas úmidas e outras massas de águas superficiais; fluxo para drenos; evapotranspiração do lençol freático; fluxos limite lateral e inferior; e limites fora do domínio do modelo.” (BACK, 2020).

2.4.1.3 Tradução do modelo matemático para o modelo numérico (simulação)

Para tradução do modelo matemático para o modelo numérico (simulação), é necessário que haja a resolução da equação geral de fluxo subterrâneo. “Os principais métodos numéricos utilizados para a resolução das equações de fluxo subterrâneos são: o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC)” (Queiroz, 2016, p. 18). O método usado no *MODFLOW* do UFC-MIGH, *software* cuja relevância é ampla neste trabalho, é o MDF.

Conforme Costa (2014), para obtenção de soluções numéricas em uma região contínua, divide-se esta em pontos nos quais somente nelas as soluções serão encontradas, ou seja, a solução para equação governante é encontrada em cada um dos pontos conforme refinamento da malha. O sistema contínuo da equação geral de fluxo subterrâneo, então, é substituído por um volume de controle descrito por conjunto finito de pontos, e as derivadas parciais são substituídas pelas diferenças locais dos valores nesses pontos. Ainda segundo Costa (2014), para que o computador possa resolver as equações diferenciais parciais (EDP), estas devem ser expressas na forma de expressões algébricas, isto é, discretizar a EDP para cada ponto da região em que se deseja calcular a solução do problema. Este processo é o inverso daquele de determinação do limite, usado para obtenção da derivada de uma função “f”.

Tavares (2010), ao discorrer sobre o método das diferenças finitas – com o entendimento da diferença central – traz como resultado o desenvolvimento da equação 24:

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_i \cong \frac{h_{i+1/2} - h_{i-1/2}}{\Delta x} \quad (24)$$

O índice “i” simboliza a posição no centro da célula, portanto “i+1/2” e “i-1/2” são as distâncias centrais de uma célula a outra. Assim sendo, usando a diferença central, a primeira e segunda derivada se tornam, respectivamente, as equações 25, 26 e 27:

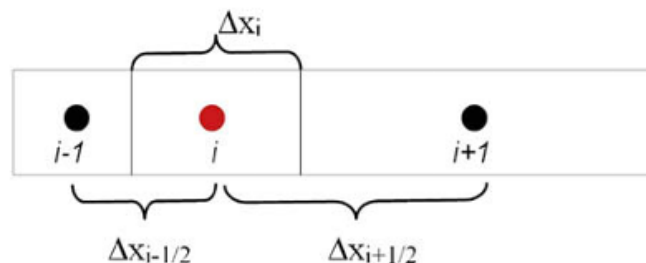
$$\frac{\delta h}{\delta x} = \frac{h_{i+1/2} - h_{i-1/2}}{\Delta x} \quad (25)$$

$$\frac{\delta^2 h}{\delta x^2} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{\Delta x} - \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{\Delta x} \right) \quad (26)$$

$$\frac{\delta^2 h}{\delta x^2} \cong \frac{h_{i-1,j} - 2h_{i,j} + h_{i+1,j}}{\Delta x^2} \quad (27)$$

Para melhor compreensão do MDF deve-se ser observada a figura 4:

Figura 4 – Notação de diferenças finitas para nós espaçados de forma irregular em uma dimensão



Fonte: Anderson, Woessner, Hunt (2015, p.87)

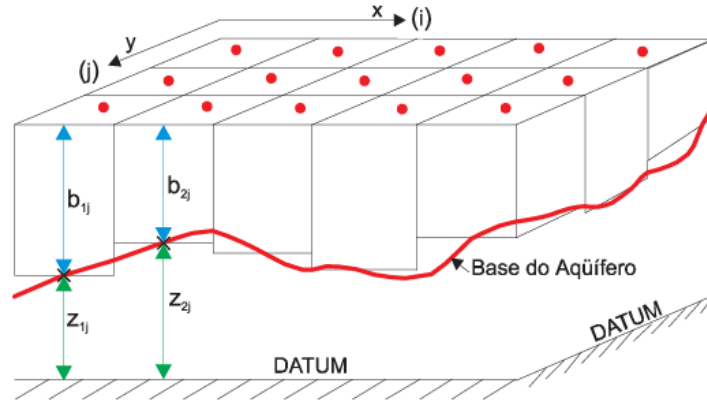
Na imagem acima o passo é entendido como as variações nos valores do gradiente hidráulico. Uma expressão semelhante é desenvolvida no eixo y, para o caso de um fluxo bidimensional. Considerando-se isotropia, permanência, e ausência de recarga, tem-se a

equação 28:

$$\frac{h_{i-1,j} - 2h_{i,j} + h_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{h_{i-1,j} - 2h_{i,j} + h_{i+1,j}}{\Delta y^2} = 0 \quad (28)$$

O problema bidimensional pode ser representado como a figura 5:

Figura 5 - Discretização de um aquífero hipotético para escoamento bidimensional



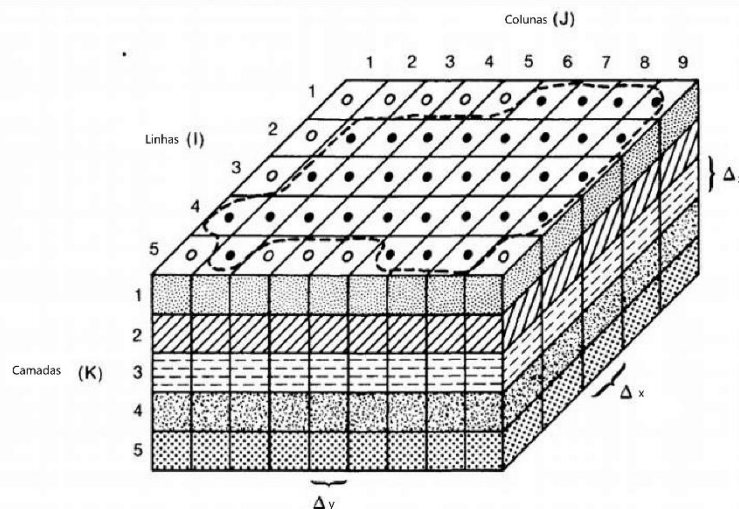
Fonte: Feitosa et al. (2008)

O valor da carga “h” seria igual a soma entre o valor da cota “z” e espessura saturada do aquífero “b”.

Portanto, ao obter-se o resultado em cada ponto da malha, tem-se a aplicação do método de diferenças finitas e a solução do sistema de equações.

Para compreensão do método das diferenças finitas num problema tridimensional adiciona-se uma expressão para o eixo z. A figura 6, extraída do trabalho de McDonald e Harbaugh (1988), mostra uma discretização espacial de um sistema aquífero com uma malha de células, cujas localizações são descritas em termos de linhas, colunas e camadas e cuja indexação utilizada é “i”, “j”, “k”:

Figura 6 - Discretização de um aquífero hipotético em escoamento tridimensional



Fonte: Adaptado por autor de McDonald e Harbaugh (1988, p.23)

Para todos efeitos, seja um problema unidimensional, bidimensional ou tridimensional, em cada nó o princípio de discretizar a EDP em uma expressão algébrica com validade local é o mesmo.

2.4.1.4 Calibração e MIGH

Conforme Feitosa *et al.* (2008), a calibração é a fase de ajuste dos parâmetros do modelo para fiel reprodução das cargas hidráulicas medidas em campo. Anderson, Woessner e Hunt (2015) chegam a citar que a calibração é a etapa mais importante do processo de modelagem, pois legitima o modelo e traz segurança à previsibilidade dos eventos. Carvalho (2013), diz que a calibração corrige os erros advindos da modelagem, em particular, das discretizações.

Carvalho (2013) ainda traz dois critérios para o sucesso da calibração: o quantitativo, que diz respeito ao balanço de massa e a correlação de resíduos de carga da hidráulica; e o qualitativo que inere à comparação dos mapas potenciométricos e hidrogeológicos, construídos antes do modelo numérico.

Queiroz (2016) cita dois tipos de calibração: manual (tentativa e erro) e calibração automatizada – a automatizada conta com um tempo de processamento consideravelmente menor em relação a manual, que por sua vez, está sujeita ao nível de experiência do usuário. Anderson, Woessner e Hunt (2015) ainda citam que não há instruções ou etapas para a calibração manual. Já na calibração automatizada, por sua vez, “transforma-se o problema inverso em um problema de otimização, onde deseja-se minimizar a função do erro médio quadrático” (QUEIROZ, 2016, p.20).

Segundo Schuster e Araújo (2004), o problema de otimização é minimizar a função objetivo descrita na equação 29:

$$F_{obj} = \int_R (\nabla h^{calc} - \nabla h^{obs})^2 dx dy \quad (29)$$

Em que:

∇h^{calc} : gradientes hidráulicos das cargas calculadas [LL^{-1}];

∇h^{obs} : gradientes hidráulicos das cargas observadas [LL^{-1}];

R: o domínio do fluxo.

Conforme Queiroz (2016), para minimizar uma função do tipo $f(x,y)$ submissa à equação $g(x,y) = 0$, utiliza-se a função Lagrangeana definida abaixo pela equação 30:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad (30)$$

Em que:

L: função lagrangeana cujo papel é transformar um problema com restrições em um problema sem restrições para que sejam usadas ferramentas de cálculo (derivadas e gradientes) combinando a função objetivo e as restrições em uma só expressão;

f: erro quadrático entre os gradientes (função objetivo);

g: equação de fluxo subterrâneo em regime estacionário (sem variação do gradiente no tempo). Este termo funciona para corrigir o erro físico advindo da modelagem demonstrando o quanto o campo de cargas está em desacordo com o a equação de massa. A função deve tender a zero no fim do processo iterativo.

Portanto, a equação assume a forma, ainda segundo Queiroz (2016) da equação 31:

$$L = (\nabla h^{calc} - \nabla h^{obs})^2 + \lambda [-\nabla (T \nabla h) - q] \quad (31)$$

Cuja forma integral está descrita na equação 32:

$$L = \int_R \{(\nabla h^{calc} - \nabla h^{obs})^2 + \lambda [-\nabla (T \nabla h) - q]\} dx dy \quad (32)$$

Em que:

L: função lagrangeana;

∇h^{calc} : gradientes hidráulicos das cargas calculadas [LL^{-1}];

∇h^{obs} : gradientes hidráulicos das cargas observadas [LL^{-1}];

R: o domínio do fluxo;

λ : multiplicador lagrangeano. Sua função é dar o “peso” da restrição da equação governante;

T: transmissividade [L^2T^{-1}]. A transmissividade indica a facilidade que a água pode se mover através do meio poroso. Feitosa *et al.* (2008) define transmissividade, para aquíferos confinados como a equação 33:

$$T = K b \quad (33)$$

Sabendo que: “T” é a transmissividade [L^2T^{-1}]; “K” a condutividade hidráulica [LT^{-1}]; e “b” a espessura do aquífero [L].

q: termo de fonte ou sumidouro [T^{-1}]. Pode assumir valores positivos, conforme nos expõe a demonstração de Tavares (2010) ou negativos segundo o desenvolvimento de Queiroz (2016).

O termo “ $-\nabla(T \nabla h)$ ” representa a divergência do vetor de descarga específica, i.e., o quanto o fluxo está entrando ou saindo do volume considerado.

Continuando o desenvolvimento proposto por Queiroz (2016) e também por Tavares (2010), para a nova função objetivo – forma integral vinculada a função lagrangeana – utiliza-se da identidade de Green. A identidade de Green diz que a integral da divergência do fluxo dentro de um volume é igual ao fluxo total através da fronteira. A intenção da aplicação é passar

as derivadas de uma variável a outra e eliminar derivações de segunda ordem. De acordo com Tavares (2010), a identidade de Green implica o que está na equação 34:

$$\int_R \lambda [-\nabla (T \nabla h) + q] dx dy = - \int_R (T \nabla h^{calc} \nabla \lambda) dx dy + \int_B (\lambda T \nabla h^{calc}) ds \quad (34)$$

Em que:

∇h^{calc} : gradiente hidráulico das cargas calculadas [LL^{-1}];

R: o domínio do fluxo;

λ : multiplicador lagrangeano;

T: transmissividade [L^2T^{-1}];

q: termo de fonte ou sumidouro [T^{-1}];

B: região que descreve as condições de contorno do problema.

Aplicando a equação acima (advinda da identidade de Green) na nova função objetivo – forma integral vinculada a função lagrangeana, conforme Tavares (2010), há o que está na equação 35:

$$L = \int_R [(\nabla h^{calc} - \nabla h^{obs})^2 + T \nabla h^{calc} \nabla \lambda + \lambda q] dx dy + \int_B (\lambda T \nabla h^{calc}) ds \quad (35)$$

Conforme Queiroz (2016) e Tavares (2010), há a necessidade de se aplicar pequenas perturbações δT na transmissividade e utilizar cálculo variacional para derivar a função acima. Além disso, conforme os mesmos autores, considera-se $\delta \nabla h^{calc}$ e δL as variações de primeira ordem de ∇h^{calc} e L (variações de primeira ordem são como a derivada do funcional – função que retorna de outra função, um número – em relação à função). Com isso, a função lagrangeana ganha a forma da equação 36:

$$\begin{aligned} \partial L = \int_R 2\partial \nabla h^{calc} [(\nabla h^{calc} - \nabla h^{obs}) - \partial T \nabla h^{calc} \nabla \lambda - T \partial \nabla h^{calc} \nabla \lambda] dx dy + \\ \int_B \lambda \partial (T \nabla h^{calc}) ds \end{aligned} \quad (36)$$

Para Tavares (2010) é necessário minimizar a função “L” sem que δL dependa de $\delta \nabla h$ (uma vez que o termo em questão é composto por uma derivada dupla), somente de δT . Ainda conforme o mesmo autor, sendo λ uma função não-específica (representa qualquer função admissível), para o eliminar o termo em cuja composição há uma derivada dupla, a função assume, no domínio “R” a forma da equação 37:

$$\nabla \lambda = \frac{2}{T} (\nabla h^{calc} - \nabla h^{obs}) \quad (37)$$

E em “B”, a da equação 38:

$$\lambda = 0 \quad (38)$$

Substituindo os termos dos valores de “ $\nabla\lambda$ ” e “ λ ” na função lagrangeana, tem-se a equação 39:

$$\partial L = \int_R \frac{2}{T} \nabla h^{calc} (\nabla h^{calc} - \nabla h^{obs}) \partial T \, dx \, dy \quad (39)$$

A equação 39, pode, então, em consonância com Tavares (2010), ser reescrita como a soma de integração nos subdomínios discretos, tornando a equação 40:

$$\partial L = \sum_i^N \int_{r_i} \frac{2}{T_i} \nabla h^{calc} (\nabla h_i^{calc} - \nabla h_i^{obs}) \partial T_i \, dx \, dy \quad (40)$$

Em que:

r_i : é um pequeno subdomínio de R;

T_i : transmissividade média no subdomínio de r_i [L^2T^{-1}];

N: quantidade de subdomínios em R;

∇h^{calc} : gradiente hidráulico das cargas calculadas [LL^{-1}];

∇h^{obs} : gradiente hidráulico das cargas observadas [LL^{-1}].

De acordo com Queiroz (2016), nesse momento, o problema da otimização consiste em minimizar a função “L” derivando-a com relação ao parâmetro que deseja se calibrar. O resultado é o que está na equação 41:

$$\frac{\partial L}{\partial T_j} = \frac{2}{T_j} \int_{r_j} (\nabla h_j^{calc} - \nabla h_j^{obs}) \nabla h^{calc} \, dx \, dy \quad (41)$$

A função objetivo em questão se refere a um aquífero confinado.

Para um aquífero não confinado, a equação governante (de fluxo) “g” é o que está constatado na equação 42:

$$\nabla (K h \nabla h) - q = 0 \quad (42)$$

Em que:

∇h : gradiente hidráulico [LL^{-1}];

h: carga hidráulica no ponto analisado, tomando referência o fundo da camada do aquífero [L];

K: condutividade hidráulica [LT^{-1}].

q: termo de fonte ou sumidouro [T^{-1}].

Para eliminação da não-linearidade da equação (duplicidade de derivada) e com isso desenvolvimento da função lagrangeana sujeita a equação de fluxo, faz-se o uso do artifício da equação 43:

$$\phi = \left(\frac{1}{2}\right) h^2 \quad (43)$$

Substituindo o termo acima na equação de fluxo subterrâneo para um aquífero livre, e desenvolvendo-se a função lagrangeana de forma semelhante ao caso confinado a função objetiva se apresenta, segundo Tavares (2010), como a equação 44:

$$\frac{\partial F_{obj}}{\partial K_i} = -\frac{1}{2K_i} \int_{r_i} [\nabla(h_i^{calc})^2 - \nabla(h_i^{obs})^2] * (\nabla h_i^{calc})^2 dx dy \quad (44)$$

Em que:

∇h^{calc} : gradiente hidráulico das cargas calculadas [LL^{-1}];

∇h^{obs} : gradiente hidráulico das cargas observadas [LL^{-1}];

K: condutividade hidráulica [LT^{-1}];

r_i : é um pequeno subdomínio de R.

Tavares (2010) ainda discorre que a calibração consiste em discretizar a equação acima em diferenças finitas e tem início com uma estimativa arbitrária da condutividade hidráulica ou transmissividade e após cada iteração o valor do parâmetro na célula será ajustado até convergir o suficiente.

Schuster e Araujo (2004) propõe que o ajuste seja feito, para o caso do aquífero livre, observando-se a equação 45:

$$T_j^{i+1} = T_j^i * \frac{|\nabla h_j^{i calc}|}{|\nabla h_j^{i obs}|} \quad (45)$$

Em que:

$|\nabla h^{calc}|$: módulo do gradiente hidráulico calculado da célula “j” no ciclo “i” [LL^{-1}];

$|\nabla h^{obs}|$: módulo do gradiente hidráulico observado da célula “j” no ciclo “i” [LL^{-1}];

T: transmissividade [L^2T^{-1}].

Para cada ciclo “i” é calculado o ângulo “ ϕ ” formado pelos vetores do gradiente hidráulico observado e calculado em cada célula “j”, chegando-se a equação 46:

$$\cos \phi_j = \frac{\nabla h_j^{i obs} \nabla h_j^{i calc}}{|\nabla h_j^{i obs}| |\nabla h_j^{i calc}|} \quad (46)$$

Schuster e Araujo (2004) continuam seu raciocínio mostrando que, para $\phi_i > 60^\circ$, tais ângulos não são considerados nos ciclos de iterações até que o procedimento imponha redução em tais valores. O critério convergência no procedimento de otimização é a minimização do somatório dos ângulos conforme a equação 47:

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j = \text{mínimo} \quad (47)$$

A conclusão final dos últimos autores citados é que o fim do processo iterativo se dá quando a raiz do erro quadrático médio chega a um valor de convergência ou a um valor estável.

Tavares (2010) apresenta o ajuste para o caso do aquífero ser livre, consoante a equação 48:

$$K_i^{j+1} = K_i^j * \frac{|\nabla h_i^{j\text{calc}}|}{|\nabla h_i^{j\text{obs}}|} \quad K_i^{\text{min}} < K_i < K_i^{\text{max}} \quad (48)$$

Em que:

$|\nabla h^{\text{calc}}|$: módulo do gradiente hidráulico calculado da célula “j” no ciclo “i” [LL^{-1}];

$|\nabla h^{\text{obs}}|$: módulo do gradiente hidráulico observado da célula “j” no ciclo “i” [LL^{-1}];

K: condutividade hidráulica [LT^{-1}].

Ainda conforme Tavares (2010), a análise da sensibilidade é observada pelo ângulo formado pelos vetores do gradiente hidráulico observado e calculado e pela raiz do erro quadrático médio (RMSEH). Quando os valores atingem um valor mínimo pré-definido, se encerra o processo de calibração.

- Ângulo formado por vetores do gradiente hidráulico observado e calculado, de acordo com a equação 49:

$$\varphi_j = \arccos \frac{\nabla h_i^{j\text{obs}} * \nabla h_i^{j\text{calc}}}{|\nabla h_j^{\text{obs}}| * |\nabla h_j^{\text{calc}}|} \quad (49)$$

- Raiz do erro quadrático médio (RMSEH), segundo a equação 50:

$$RMSEH = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (h^{\text{obs}} - h^{\text{calc}})_i^2} \quad (50)$$

Em que:

N: quantidade de células ativas;

h^{calc} : cargas calculadas [L];

h^{obs} : cargas observadas [L].

Continuando-se em consonância com Tavares (2010), para cálculo dos componentes do vetor de gradiente hidráulico em cada célula a equação é a seguinte:

- Em x, como se nota na equação 51:

$$\nabla h_x(i, j) = \frac{h(x_{i+1}, y_j) - h(x_{i-1}, y_j)}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (51)$$

- Em y, conforme a equação 52:

$$\nabla h_y(i, j) = \frac{h(x_i, y_{j+1}) - h(x_i, y_{j-1})}{y_{j+1} - y_{j-1}} \quad (52)$$

E o módulo expressa-se na equação 53:

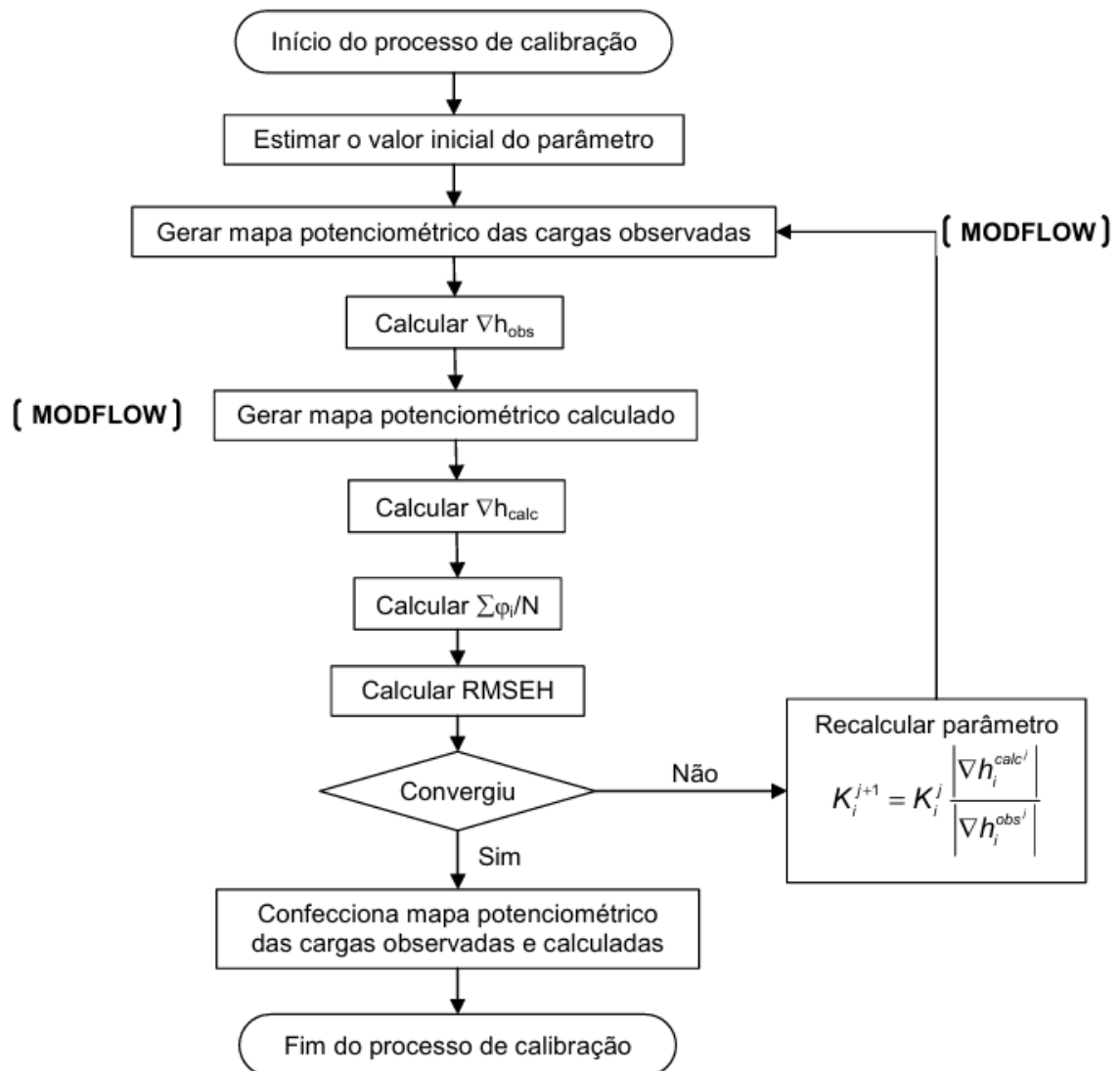
$$|\nabla h| = \sqrt{\nabla h_x^2 + \nabla h_y^2} \quad (53)$$

Tavares (2010) ainda propõe que no método de calibração o mapa potenciométrico observado seja obtido a partir da modelagem computacional de fluxo subterrâneo, não permitindo a variação das cargas observadas, isto é, após a composição do modelo com as estimativas iniciais dos parâmetros hidrogeológicos e medição da carga de alguns poços, estes seriam considerados invariáveis no modelo e após a simulação, este seria o mapa potenciométrico observado.

A vantagem desse procedimento é que as cargas conhecidas servem de âncoras para a simulação. A conclusão de Tavares (2010) sobre esse assunto é que, após a geração das cargas observadas e calculadas, verifica-se a convergência do MIGH e para uma resposta negativa, o parâmetro é adaptado e novos mapas potenciométricos, observados e calculados são gerados.

O processo de calibração, portanto, acontece como expresso na figura 7:

Figura 7 – Fluxograma MIGH



Fonte: Tavares (2010, p. 32)

2.4.1.5 Validação do modelo

O processo de validação do modelo consiste em julgar, subjetivamente ou por meio de análises probabilísticas, se o modelo construído prevê corretamente o fenômeno estudado. Mais do que simplesmente aceitar o resultado matemático, é necessário contrapor-lo com a realidade física. Anderson, Woessner e Hunt (2015) consideram erros na calibração alguns itens, tais quais: considerar a calibração completa simplesmente porque uma estatística resumida é respeitada, como, por exemplo, o erro médio absoluto; e aceitar os resultados computacionais dos parâmetros apenas por serem advindos de algoritmos, sem avaliação técnica.

Por fim, durante o processo de validação é necessário comparar o resultado obtido com o primeiro item das etapas do fluxo de modelagem numérico: a definição de propósito. Caso seja um modelo preditivo, ele será válido se suas previsões se mantiverem dentro do erro

estimado. Se um modelo for descritivo, sua validação será aceita caso os fenômenos reais da área estudada puderem ser descritos com a precisão requerida.

3 METODOLOGIA

O trabalho em questão tem como proposta partir de um caso hipotético e desenvolver-se na comparação entre um caso de calibração com zoneamento da condutividade hidráulica e sem tal zoneamento. A pesquisa desenvolvida será do tipo quantitativa e aplicada, e conta com um procedimento técnico baseado em modelagem numérica.

3.1 Etapas metodológicas

Seguindo as orientações de Anderson, Woessner e Hunt (2015), a metodologia do trabalho para construção do modelo numérico a ser estudado foi: a definição do propósito do modelo, a elaboração do modelo conceitual, a formulação do modelo matemático, a tradução do modelo conceitual em modelo numérico, a calibração e a validação do modelo.

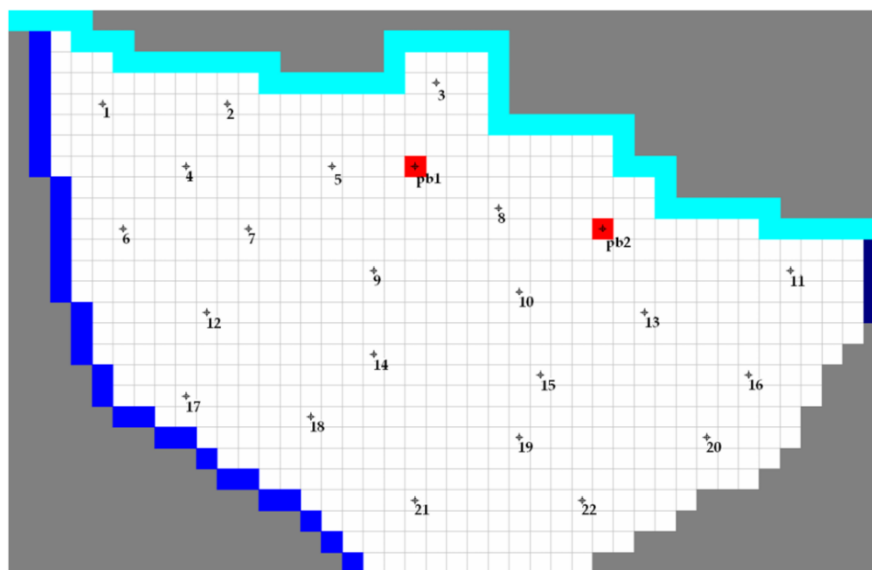
3.1.1 Definição do propósito do modelo

O propósito do modelo numérico é ser prescritivo, no que tange um fenômeno do escoamento subterrâneo e descritivo levando em conta o panorama das águas subterrâneas para um exemplo hipotético. Para que esses objetivos sejam atingidos, é fulcral que o modelo do método iterativo do gradiente hidráulico seja validado matematicamente e fisicamente.

3.1.2 Elaboração do modelo conceitual e formulação do modelo matemático

O modelo conceitual do caso de estudo será um exemplo hipotético que está descrito no trabalho de Schuster e Araujo (2004) bem como no trabalho de Tavares (2010). A malha da área em questão está exposta na figura 8:

Figura 8 – Caso hipotético de estudo



Fonte: Tavares (2010, p.44)

O aquífero do caso em estudo é do tipo aluvial, não confinado, isotrópico e heterogêneo. Na proposição referencial, há quatro zonas de condutividade hidráulica diferentes: K_1 : 0,0017 m/s; K_2 : 0,0040m/s; K_3 : 0,0016m/s; K_4 : 0,0003m/s, zoneadas conforme a figura 12 (p. 44). O valor da porosidade efetiva “ η_e ” é igual 0,1 e o da recarga média “ R_v ” é de 5×10^{-9} m/s. O domínio da área conta com 4.200m divididos em 42 células na direção “x” e 2.700m divididos em 27 células ao longo do eixo “y”.

As condições de contorno se expressam da seguinte forma: um rio na porção Norte cuja condutividade hidráulica “ K_{rio} ” é $1,3 \times 10^{-7}$ m/s (células ciano); uma fronteira impermeável na região Sul; uma região montanhosa na zona Oeste com condição de fluxo subterrâneo de vazão “Q” de 0,012m³/s distribuída ao longo de 30 células resultando em uma vazão “Q” de 0,004m³/s em cada uma dessas células (células azul médio); e no quadrante Leste a carga hidráulica “h” é especificada e constante, sendo igual a 23m (células azul escuro).

Outras características do aquífero são: única camada de espessura constante variando de 2m a 3m; bombeamento em dois poços (Pb) com taxas de Q_{Pb1} : 0,012m³/s e Q_{Pb2} : 0,015m³/s, e monitoramento em 22 poços de observação (Pt) cujas cargas hidráulicas estão na tabela 1:

Tabela 1 - Cargas hidráulicas em poços do exemplo hipotético

Poço	x (m)	y (m)	h (m)
Pb1	1950	1950	25,01
Pb2	2850	1650	24,68
Pt1	450	2250	25,93
Pt2	1050	2250	25,67
Pt3	2050	2350	25,37
Pt4	850	1950	25,72
Pt5	1550	1950	25,44

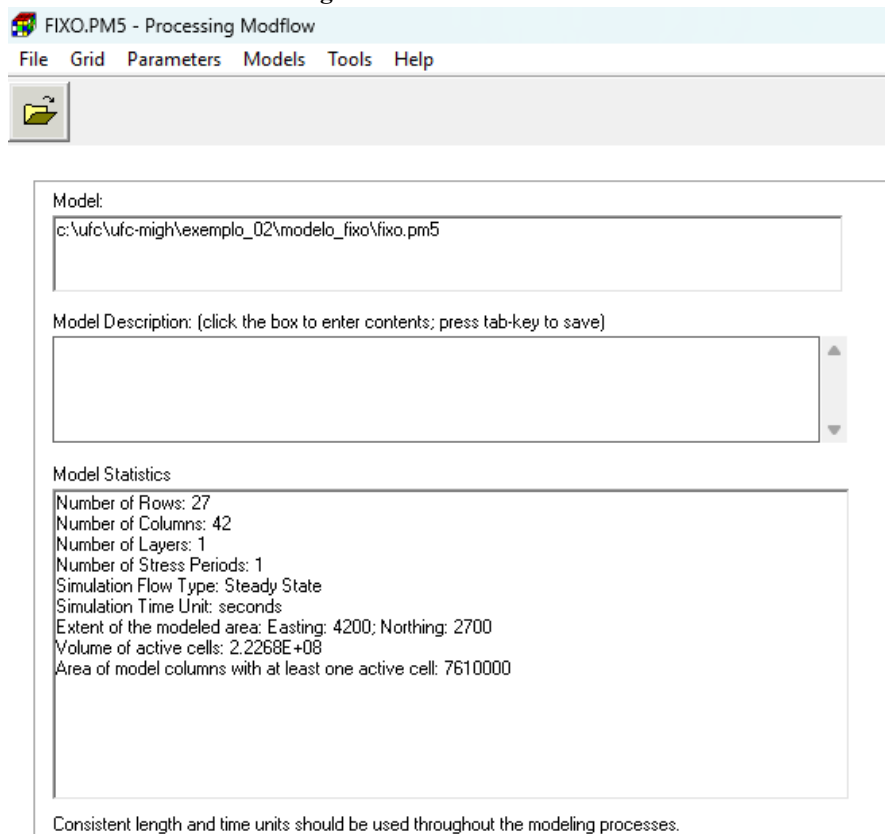
Pt6	550	1650	26,13
Pt7	1150	1650	26,11
Pt8	2350	1750	25,03
Pt9	2450	1350	25
Pt10	2450	1450	25
Pt11	3750	1450	23,97
Pt12	3050	1250	24,76
Pt13	1750	1250	25,49
Pt14	2550	950	25,46
Pt15	3550	950	24,73
Pt16	850	750	25,43
Pt17	1450	750	25,78
Pt18	2750	650	25,37
Pt19	1950	450	25,63
Pt20	3350	650	24,93
Pt21	1950	350	25,68
Pt22	2750	350	25,37

Fonte: Autor (2026)

3.1.3 Tradução do modelo matemático para o modelo numérico

O PMWIN foi o *software* utilizado para composição e cadastro do modelo numérico. A interface do PMWIN é conforme a figura 9:

Figura 9 – Interface PMWIN

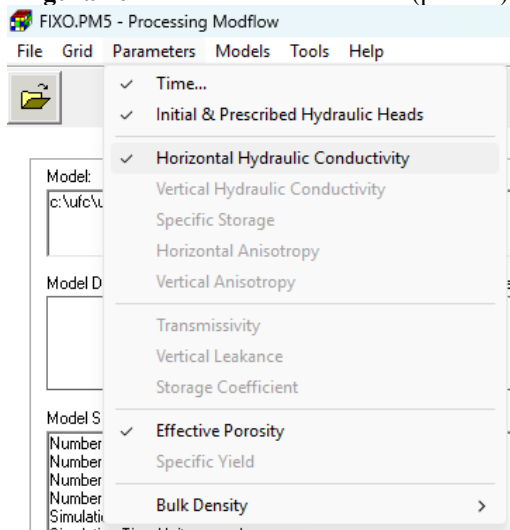


Fonte: Autor (2026)

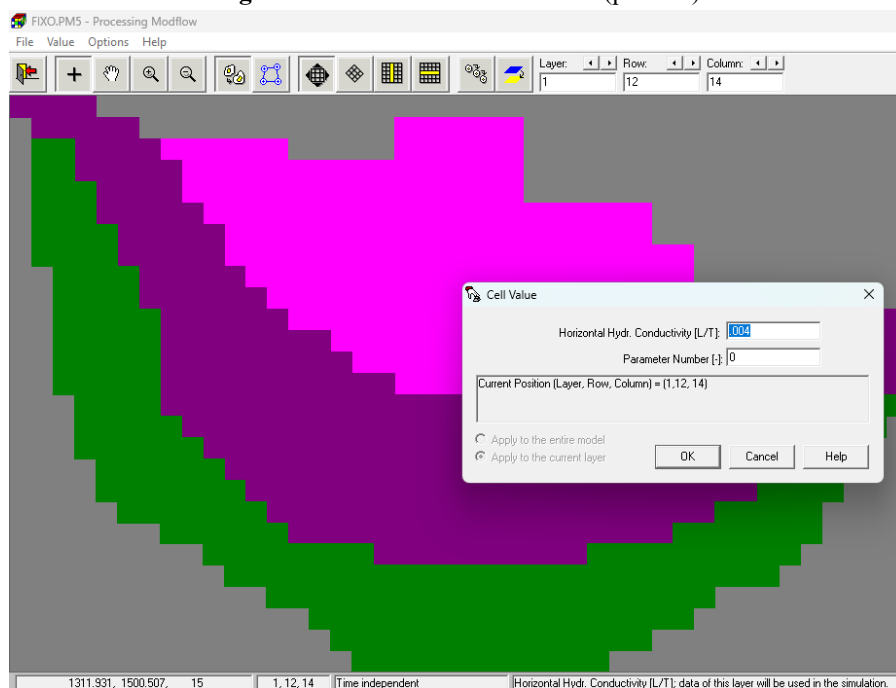
Para criação do modelo, foram gerados dois arquétipos separadamente, mas idênticos entre si, destoando um do outro apenas pelo fato da fixação das cargas das células dos poços de bombeamento e monitoramento para o modelo fixo e liberdade para as mesmas células no modelo não-fixo. Após o processo de inserção do modelo matemático (dimensões das células, valores de carga, condutividade hidráulica, recarga, condições de contorno e todas as informações relevantes que fizerem parte da etapa anterior) segue-se para a etapa de calibração abrindo a pasta que foi modificada no PMWIN dentro do UFC-MIGH.

No programa PMWIN, e, por conseguinte, na aba de “*Horizontal Hydraulic Conductivity*” dentro dos parâmetros do menu, foram inseridos os valores da condutividade para posterior calibração e análise da sensibilidade. O caminho pode ser observado pelas figuras 10 e 11:

Figura 10 - Cadastro condutividade (passo 1)



Fonte: Autor (2026)

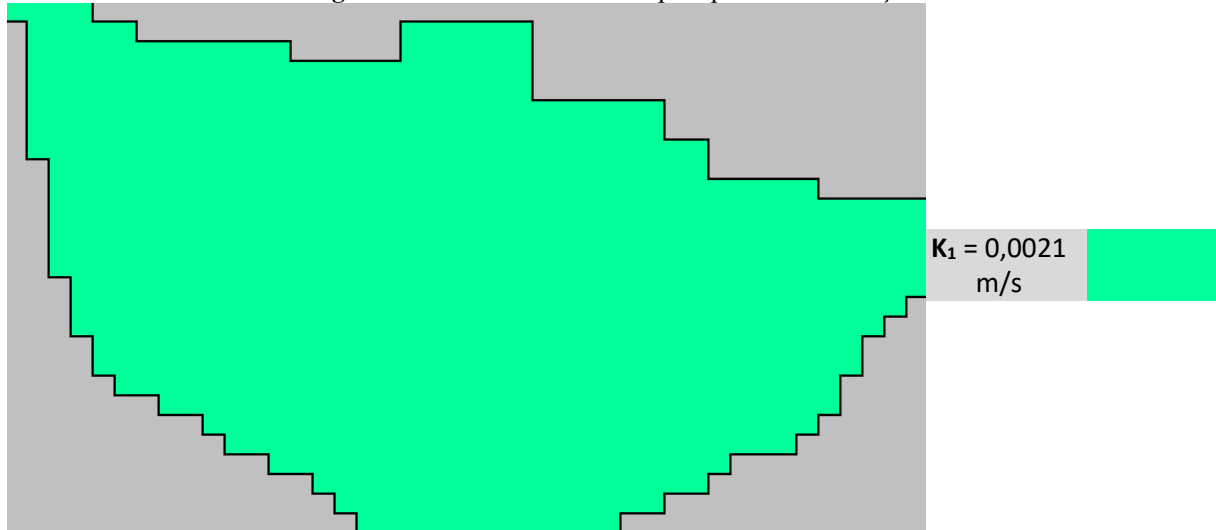
Figura 11– Cadastro condutividade (passo 2)

Fonte: Autor (2026)

No trabalho em questão, foram feitos cinco processos de calibração diferentes usando como *input* cinco diferentes valores de calibração, isto é, cada caso parte de condições diferentes de zoneamento e as zonas correspondem as condutividades iniciais do processo de calibração.

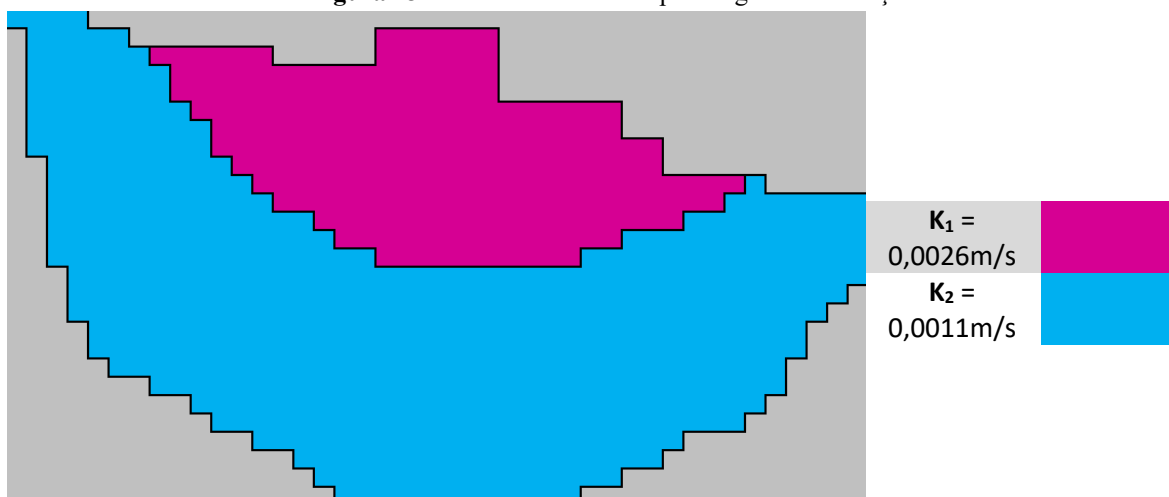
Os casos usam como exemplo ou derivações matemáticas desse exemplo, o modelo hipotético proposto por Schuster e Araujo (2004) e Tavares (2010). Se tratando, pois, de valores especulativos, não foi feita nenhuma correlação entre tais resultados e indicações de solo.

O primeiro processo de calibração deu-se para um problema sem zoneamento, isto é, com um valor de “K” constante ao longo da posição. O resultado de $K = 0,0021 \text{ m/s}$ foi obtido através de uma média ponderada (peso foi o número de células) entre os valores da condutividade do modelo proposto por Schuster e Araujo (2004) e Tavares (2010), segundo a figura 12:

Figura 12 – Zoneamento inicial para primeira calibração

Fonte: Autor (2026)

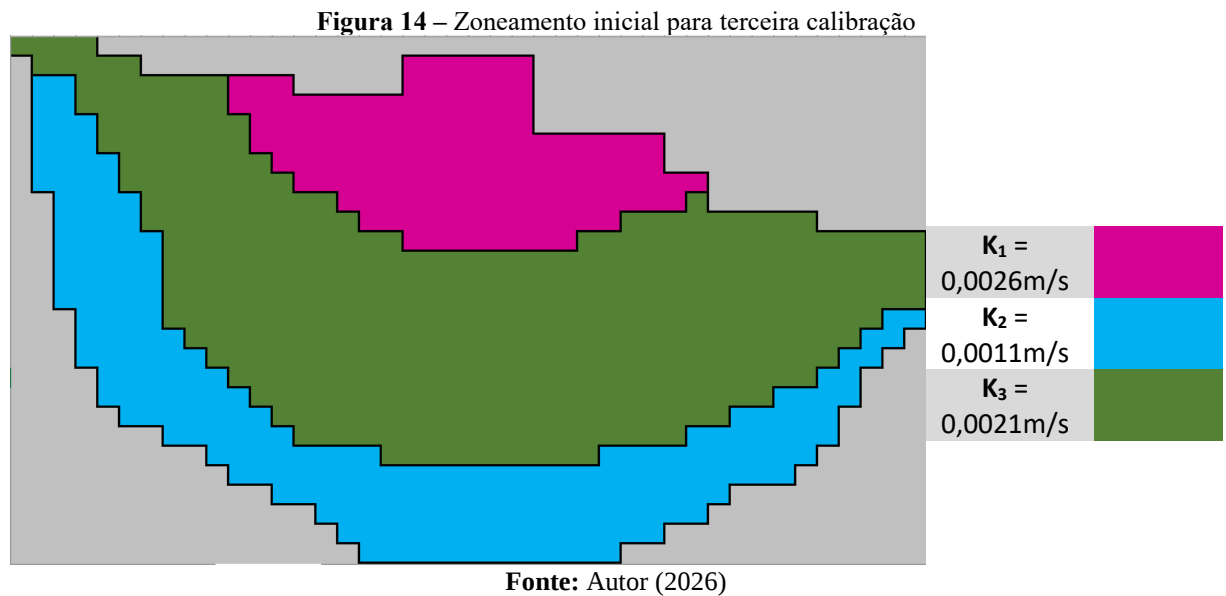
O segundo processo de calibração será desdobrado a partir de um problema com zoneamento, isto é, com um valor de “K” diferente ao longo do aquífero. Para o caso em questão, o aquífero foi zoneado em duas camadas. O parâmetro K foi obtido através de uma média ponderada entre as condutividades das camadas superior e inferior dos valores propostos por Schuster e Araujo (2004) e Tavares (2010). O zoneamento está descrito conforme a figura 13:

Figura 13 – Zoneamento inicial para segunda calibração

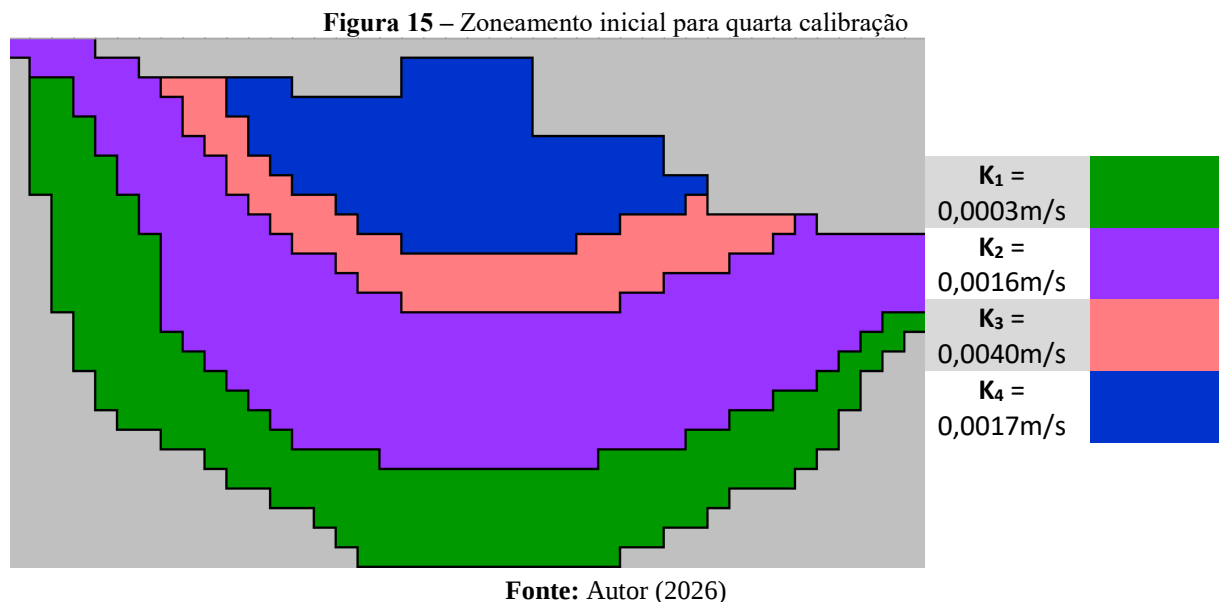
Fonte: Autor (2026)

A calibração de número quatro contará com um zoneamento da área em três valores diferentes de condutividade hidráulica horizontal. Seguindo o padrão das análises anteriores, o coeficiente de permeabilidade foi obtido através de médias ponderadas das camadas adjacentes.

Para o caso em questão, optou-se por um critério mais arbitrário, seguindo, para a camada superior, uma média ponderada das zonas superiores dos valores propostos por Schuster e Araujo (2004) e Tavares (2010), e assim por diante nas faixas intermediária e inferior. O zoneamento tem a forma da figura 14:

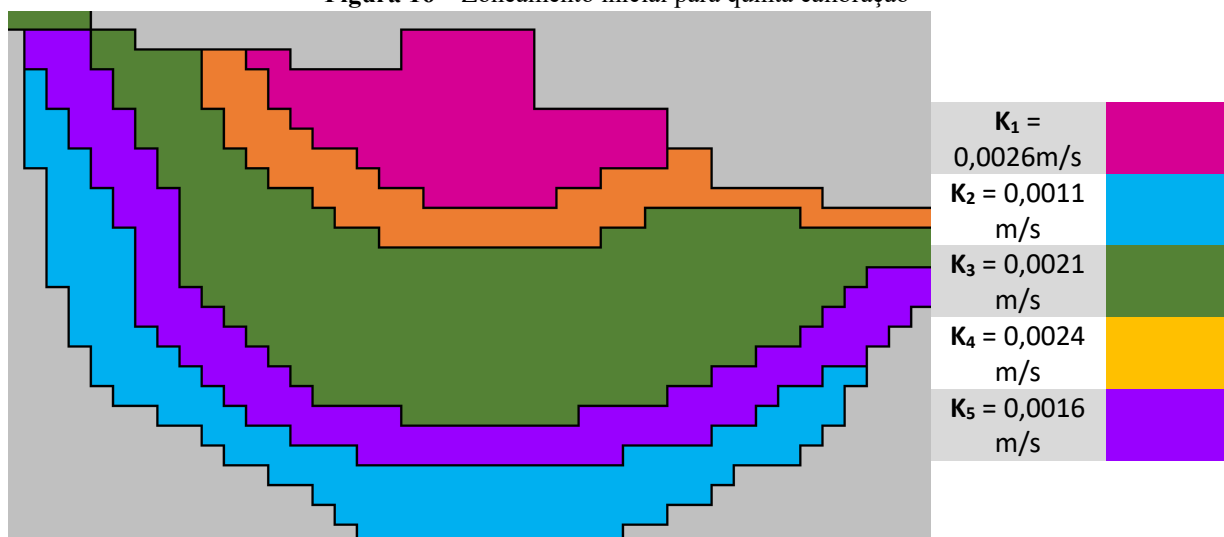


Para o quarto caso, o zoneamento inicial foi o proposto por Schuster e Araujo (2004) bem como por Tavares (2010), segundo a figura 15:



Por fim, a quinta e última calibração será composta por cinco zonas. Usou como base o quarto caso, adicionando-se zonas de interface com a média simples dos valores de “K” de cada camada limítrofe. O resultado pode ser visto na figura 16:

Figura 16 – Zoneamento inicial para quinta calibração

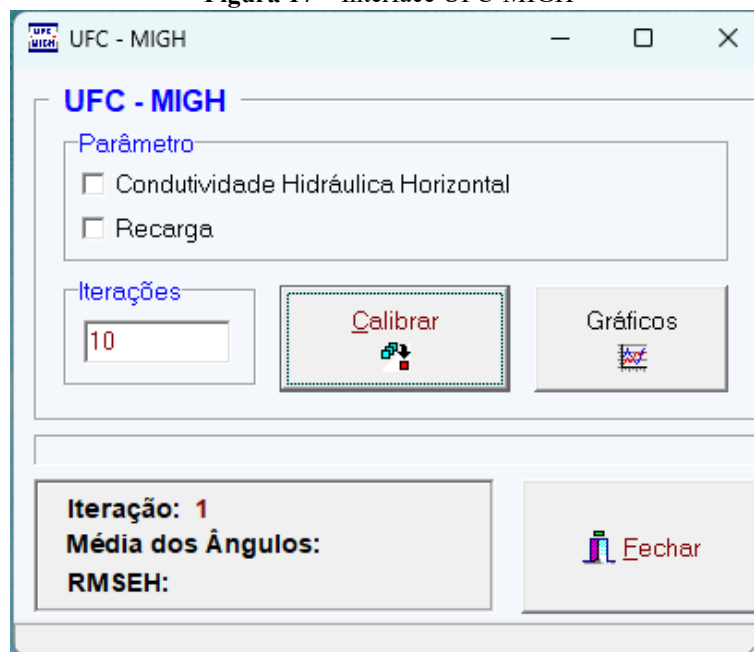


Fonte: Autor (2026)

3.1.4 Calibração

O programa utilizado para interface com os dados e iterações da calibração foi o UFC-MIGH cujo software de processamento do fluxo subterrâneo é o MOD-FLOW. Sua interface pode ser conhecida a partir da figura 17:

Figura 17 – Interface UFC-MIGH



Fonte: Autor (2026)

Após cadastro do modelo numérico no PMWIN e abertura da pasta deste no UFC-MIGH, definiu-se 20 calibrações e escolheu-se o parâmetro “condutividade hidráulica horizontal”. Foram avaliadas simulações com um número maior de interação e os erros não diminuíram expressivamente, então, para melhor visualização dos gráficos, optou-se pelos

resultados obtidos na iteração 20.

3.1.5 Validação

O processo de validação do modelo partiu, inicialmente, da análise estatística dos mapas potenciométricos advindos dos processos de calibração citados na etapa anterior. Como prosseguimento, foi levantado a opção entre os cinco casos que geraram menor RMSEH e média dos ângulos entre os vetores das cargas hidráulicas calculadas e observadas. Além disso, foi feito um mapeamento estatístico mais abrangente para entendimento dos pontos de divergência e de ancoragem de valores para verificar: onde há mais certeza/incerteza nos valores de K; quão consistente é o resultado entre os cenários; e se as diferenças são significativas (não apenas ruído numérico). A intenção desse estudo foi ter ciência de como o processo de calibração é sensível ao zoneamento inicial de entrada no programa.

3.1.5.1 Precisão da calibração: avaliação dos quatro cenários

Para exame do “melhor” processo de calibração foi analisado a raiz do erro quadrático médio e o ângulo formado pelos vetores do gradiente hidráulico observado e calculado. Desenvolveu-se, então, uma enumeração dos melhores processos de calibração.

3.1.5.2 Sensibilidade e estabilidade ao zoneamento: avaliação dos pontos críticos

Com o objetivo de investigar os pontos (células) críticos nos quais os valores se ancoram ou divergem (certeza/incerteza do parâmetro), a consistência dos resultados e o quão as diferenças são significativas foi feito um estudo estatístico avaliando os valores de K, célula a célula entre as calibrações.

Sabendo que há 5 processos de calibração (m calibrações) e 1.134 células (N células), há, para cada célula “ ij ”, o valor de $K_{ij,k}$, para k representando cada calibração (1 a 5). Então, os parâmetros foram avaliados conforme:

- Média: Valor “comum” para cada célula levando em conta os quatro processos de calibração, segundo a equação 50:

$$\bar{K}_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m K_{ij,k} \quad (50)$$

- Desvio padrão(s_{ij}): Retorna o quanto os valores de “K” variam entre as calibrações numa mesma célula, consoante a equação 51:

$$s_{ij} = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (K_{ij,k} - \bar{K}_{ij})^2} \quad (51)$$

- Coeficiente de variação (CV): Revela a dispersão relativa. Com base em critérios de dispersão adotados na literatura de estatística experimental, assume-se que um CV baixo ($CV_{ij} < 0,2$) indica estabilidade e robustez à calibração, enquanto um CV alto ($CV_{ij} > 0,5$) reflete elevada incerteza. O coeficiente de variação é dado pela equação 52:

$$CV_{ij} = \frac{s_{ij}}{\bar{K}_{ij}} \quad (52)$$

Foi feita uma análise do coeficiente de variação também para a carga hidráulica. Os critérios adotados serão 20 vezes menores, ou seja, caso o coeficiente de variação seja baixo ($CV_{ij} < 0,01$) a célula é estável que indica robustez do modelo. Caso o coeficiente de variação seja alto ($CV_{ij} > 0,025$), há sensibilidade do modelo para a calibração inicial.

Na ausência de diretrizes consolidadas (valores referência de “CV”) na literatura para este cenário específico, adotaram-se limites empíricos fundamentados na estatística aplicada, oriundos de um compilado de pesquisas correlatas em áreas diversas.

Para estudo sobre a significância das diferenças dos valores de “K” ao longo das calibrações, foi feito o teste de Kruskal-Wallis. Tal teste é indicado porque parte de uma hipótese não paramétrica. Conforme Freeze e Cherry (2017), a condutividade hidráulica segue uma distribuição log-normal, ou seja, há um grau de heterogeneidade muito alto. Por isso, um exame que não leve em conta os valores absolutos, e sim as posições relativas é importante para que não se obtenha um resultado distorcido.

Para esse teste, foram combinados todos os valores de $K_{ij,k}$ e atribuídas posições a eles, do menor, para o maior. A partir da soma destes, o resultado estatístico é calculado conforme a equação 53:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{R}_i - \bar{R})^2 \quad (53)$$

Em que:

N: número de observações (células e calibrações);

k: número de grupos (calibrações comparadas);

n_i : número de observações do grupo “i” (células de cada calibração);

$R_{med,i}$: mediana das posições do grupo “i”;

R_{med} : mediana das posições gerais;

Caso haja empate, é usado um parâmetro “T” para correção do valor de “H”.

Há duas hipóteses para o teste:

- H_0 : A distribuições de “K” são estatisticamente próximas entre os cenários. Isto significa que as diferença entre os valores da condutividade são aleatórias, e, em tese, não diferença entre as medianas dos casos;
- H_1 : Existe pelo menos uma calibração diferente das demais, então, as distribuições de “K” não são estatisticamente próximas entre os cenários. Isso indica que há, pelo menos uma diferença entre as medianas;

O valor de “H” segue, aproximadamente, uma distribuição qui-quadrado e tem “k-1” graus de liberdade. Para o teste em questão, há 4 graus de liberdade (cinco grupos menos 1), ou seja, se há conhecimento de 4 das medianas dos postos, a quinta é determinada automaticamente. Para o teste, é utilizado como apoio o valor-p que indica a probabilidade de obter um resultado maior ou igual ao de “H” ao acaso. Matematicamente, este número é a área da curva qui-quadrado à direita do “H” observado. Caso o valor-p seja maior que 5% (nível de significância representado por alfa – indica a probabilidade máxima de rejeitar a hipótese nula mesmo que ela seja verdadeira), a hipótese “ H_0 ” é validada. Para valores menores ou iguais, a hipótese “ H_0 ” é rejeitada. O valor-p, no Excel é dado pela fórmula “=DIST.QUIQUA.CD(H; graus_de_liberdade)”.

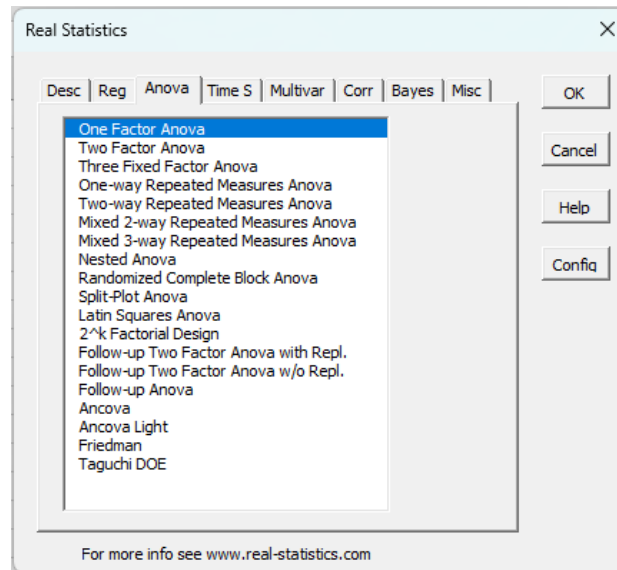
A partir disso, foram elaborados mapas mostrando o desvio padrão e o coeficiente de variação de cada célula.

Por fim, tendo o teste de Kruskal-Wallis provado que as diferenças são significativas, foi feito o teste post-hoc de Dunn para entendimento sobre quais grupos está acontecendo essa diferença. Este teste “depois disso” funciona como um comparador par a par do Kruskal-Wallis.

Tanto o teste de Kruskal-Wallis, como o post-hoc de Dunn foram desenvolvidos mediante a ferramenta de suplementos do Excel chamada “*Xrealstats*”.

Com os resultados da condutividade advindos das calibrações listados em colunas separadas por caso, ao longo de 762 linhas por análise (eliminando-se os valores nulos), abre-se a ferramenta “*Real Statistics*” na aba de suplementos e no campo da ANOVA, opta-se pelo item: “One Factor Anova”, segundo a figura 18:

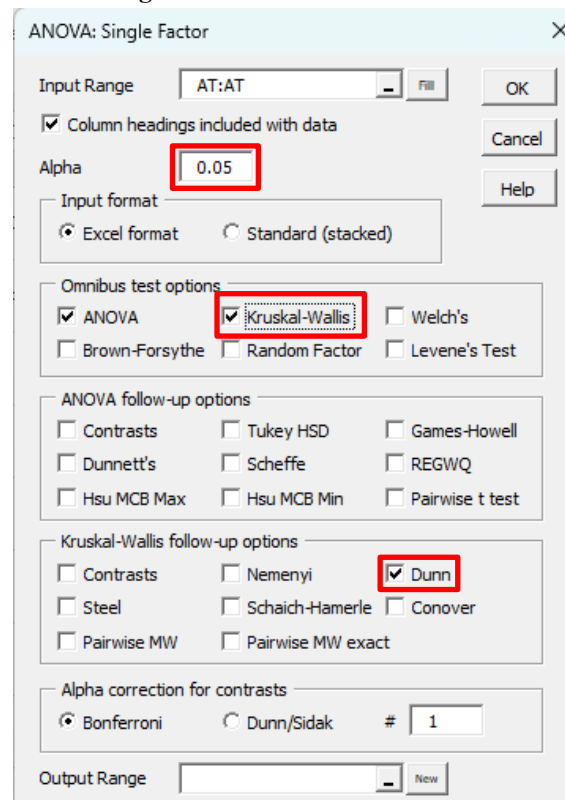
Figura 18 – Interface Real Statics



Fonte: Autor (2026)

A ANOVA é um teste semelhante ao Kruskal-Wallis (conhecido como ANOVA não paramétrico) mas desenvolvido para uma série de requisitos não atendidos pelo trabalho em questão, entre eles a distribuição normal (condutividade hidráulica segue distribuição log-normal). No novo menu, é cadastrado o valor alfa igual 0,05 (5%) e escolhido as opções “Kruskal-Wallis” e “Dunn”, conforme sinaliza a figura 19:

Figura 19 – Interface Real Statics



Fonte: Autor (2026)

4 RESULTADOS

Os resultados do trabalho serão divididos em quatro análises: resultado das calibrações mediante análise do RMSEH e médias dos ângulos, valores de K para cada um dos casos e análise da média e do coeficiente de variação, teste de Kruskal-Wallis e o post-hoc de Dunn, valores da carga hidráulica do modelo não-fixos na última iteração diante dos cinco cenários.

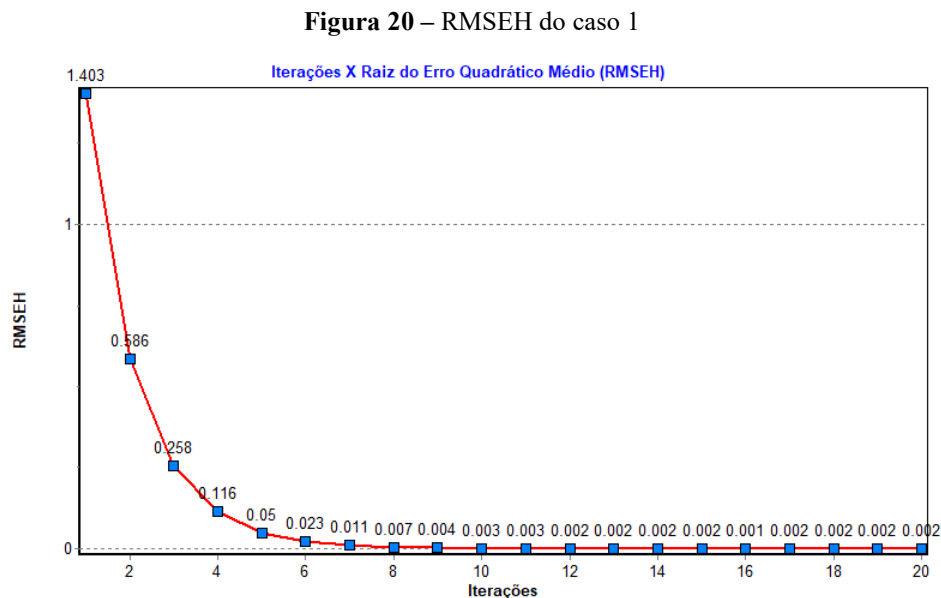
4.1 Resultados das calibrações

Os resultados das calibrações estão expressos em função das iterações. Tanto para o caso da raiz do erro quadrático médio como o para a média do ângulo formado pelos vetores do gradiente hidráulico observado e calculado o gráfico será plotado conforme a quantidade de iterações feitas.

4.1.1 Caso 1

4.1.1.1 Raiz do erro quadrático médio (RMSEH)

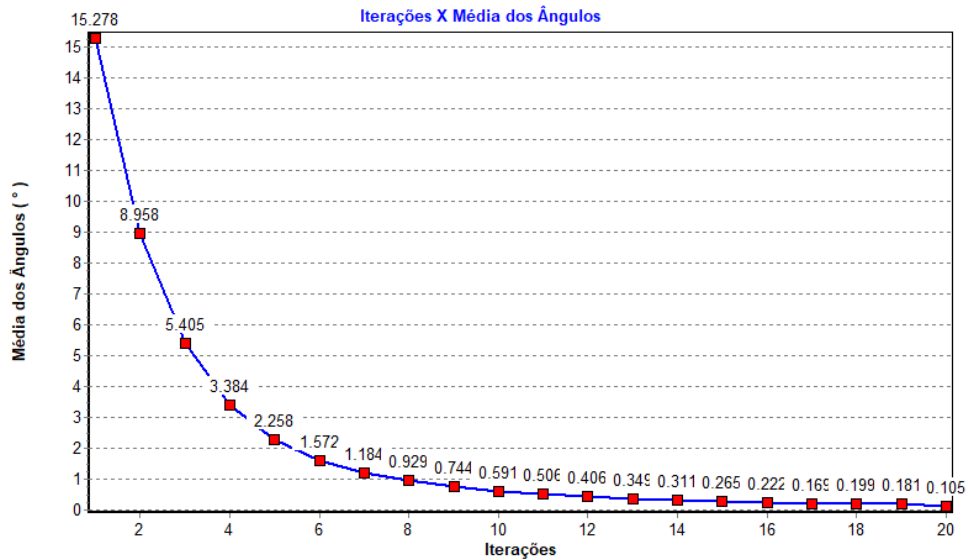
O gráfico da raiz do erro quadrático médio para cada iteração do caso 1 está exposto na figura 20:



Fonte: Autor (2026)

4.1.1.2 Ângulo formado por vetores do gradiente hidráulico observado e calculado

O gráfico da raiz do ângulo formado por vetores do gradiente hidráulico observado e calculado para cada iteração do caso 1 está exposto na figura 21:

Figura 21 – Média dos ângulos das cargas do caso 1

Fonte: Autor (2026)

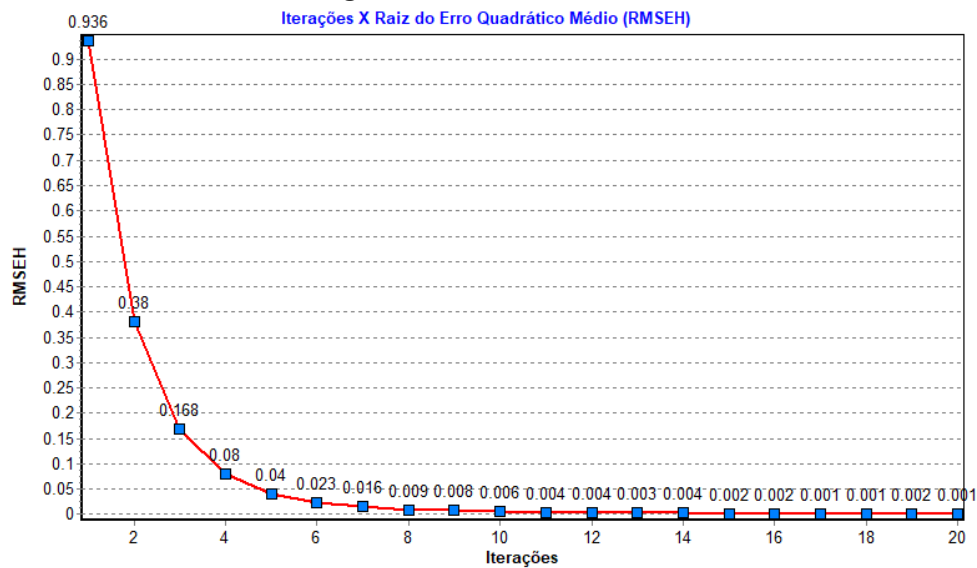
Os resultados apresentam estabilidade e tendência assintótica para o erro mínimo absoluto.

O RMSEH apresentou valores finais próximos a zero tendo os três últimos valores se estabilizado em 0,002. Já quanto a medidas da média do ângulo formado pelos vetores do gradiente hidráulico observado e calculado, embora estas não tenham gerado valores exatamente iguais, seus resultados são bem próximos, sendo o último 0,105.

4.1.2 Caso 2

4.1.2.1 Raiz do erro quadrático médio (RMSEH)

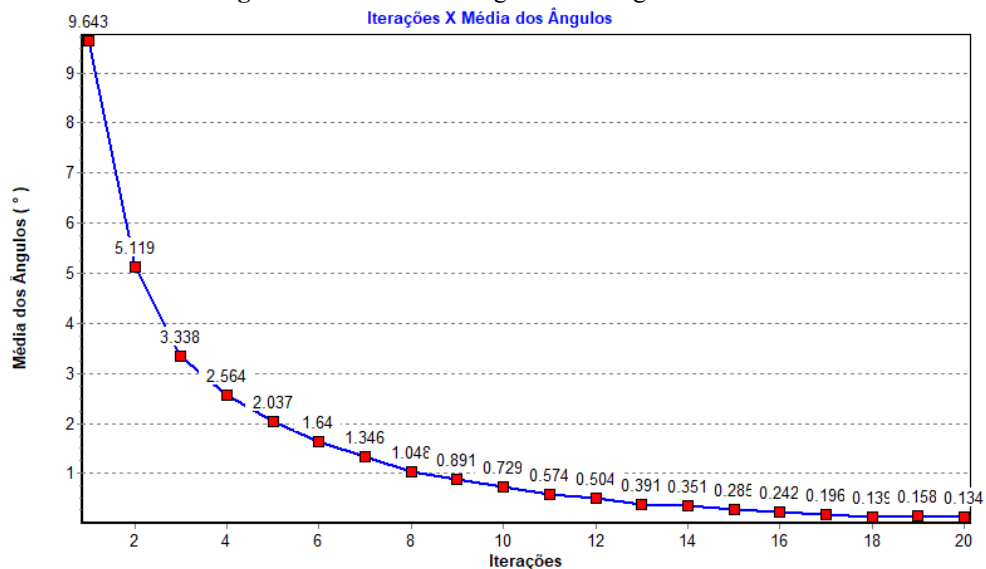
O gráfico da raiz do erro quadrático médio para cada iteração do caso 2 está exposto na figura 22:

Figura 22 – RMSEH do caso 2

Fonte: Autor (2026)

4.1.2.2 Ângulo formado por vetores do gradiente hidráulico observado e calculado

O gráfico da raiz do ângulo formado por vetores do gradiente hidráulico observado e calculado para cada iteração do caso 2 está exposto na figura 23:

Figura 23 – Média dos ângulos das cargas do caso 2

Fonte: Autor (2026)

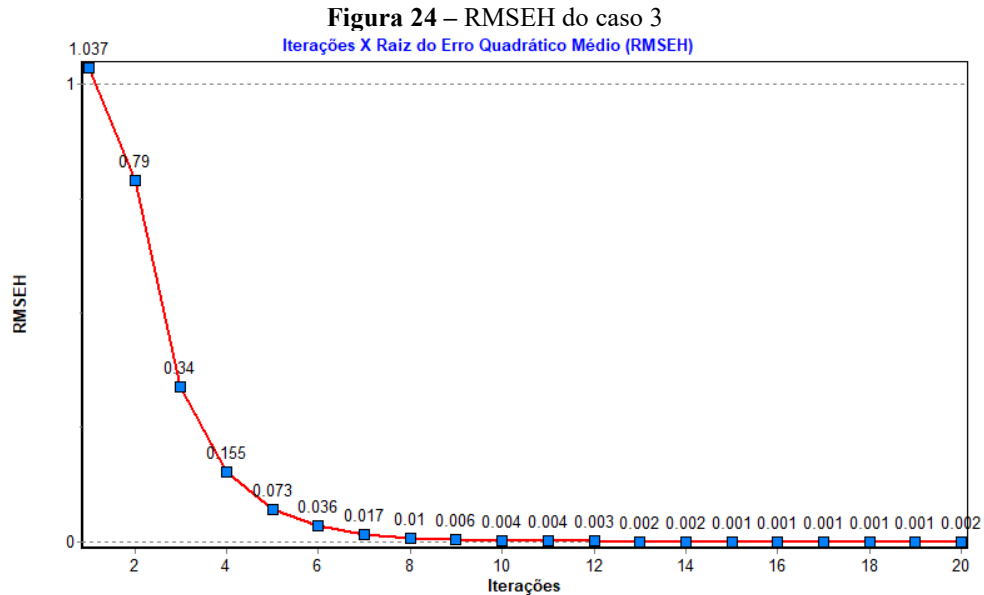
Os resultados apresentam estabilidade e tendência assintótica para o erro mínimo absoluto, em especial.

O RMSEH, bem como a média do ângulo formado pelos vetores do gradiente hidráulico observado e calculado apresentou valores finais próximos a zero. Embora seus três últimos valores não tenham se estabilizado em um número exato, seus resultados são bem próximos, sendo os últimos 0,001 e 0,105, respectivamente.

4.1.3 Caso 3

4.1.3.1 Raiz do erro quadrático médio (RMSEH)

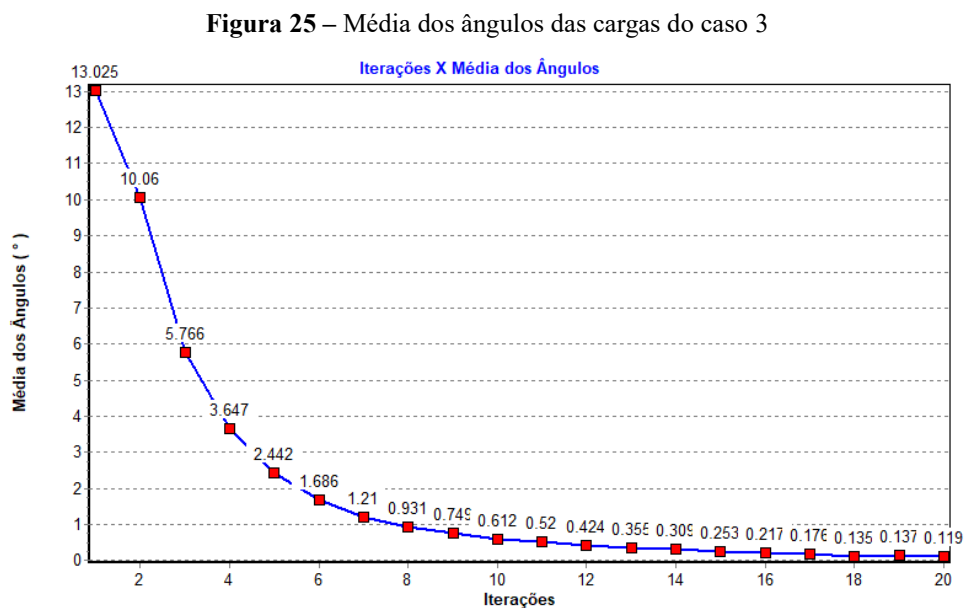
O gráfico da raiz do erro quadrático médio para cada iteração do caso 3 está exposto na figura 24:



Fonte: Autor (2026)

4.1.3.2 Ângulo formado por vetores do gradiente hidráulico observado e calculado

O gráfico da raiz do ângulo formado por vetores do gradiente hidráulico observado e calculado para cada iteração do caso 3 está exposto na figura 25:



Fonte: Autor (2026)

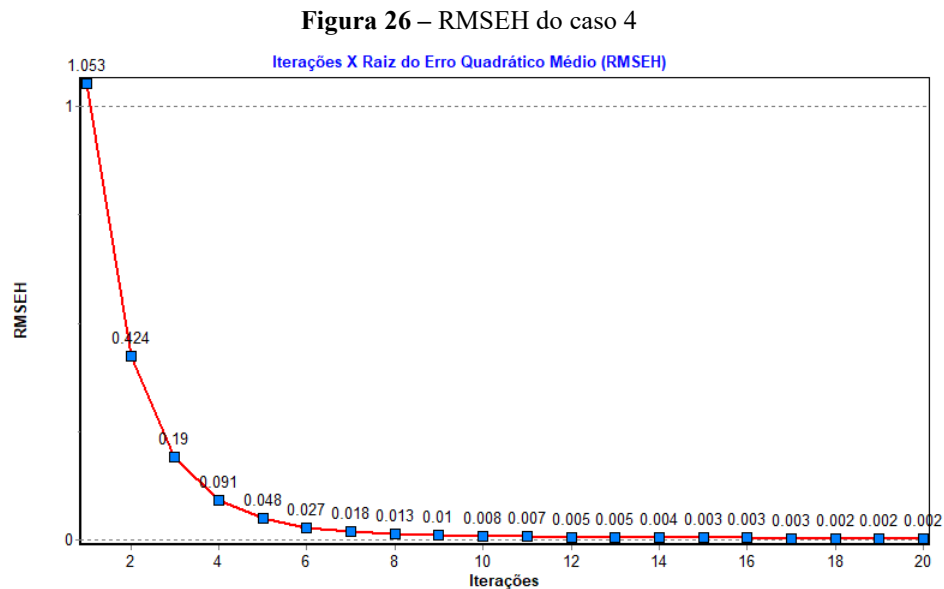
Os resultados apresentam estabilidade e tendência assintótica para o erro mínimo absoluto.

O RMSEH, bem como a média do ângulo formado pelos vetores do gradiente hidráulico observado e calculado apresentou valores finais próximos a zero. Embora seus três últimos valores não tenham se estabilizado em um número exato, seus resultados são bem próximos, sendo os últimos 0,002 e 0,119, respectivamente.

4.1.1 Caso 4

4.1.4.1 Raiz do erro quadrático médio (RMSEH)

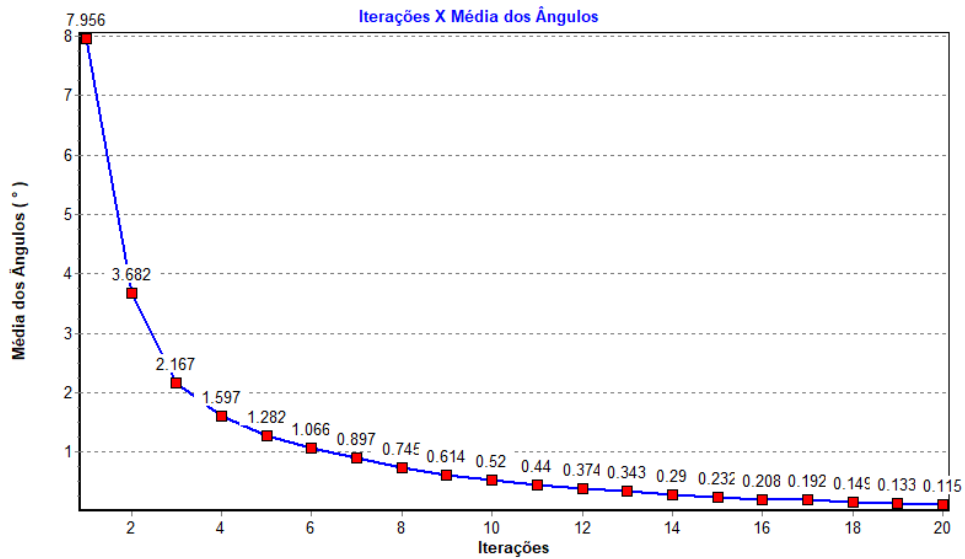
O gráfico da raiz do erro quadrático médio para cada iteração do caso 4 está exposto na figura 26:



Fonte: Autor (2026)

4.1.4.2 Ângulo formado por vetores do gradiente hidráulico observado e calculado

O gráfico da raiz do ângulo formado por vetores do gradiente hidráulico observado e calculado para cada iteração do caso 4 está exposto na figura 27:

Figura 27 – Média dos ângulos das cargas do caso 4

Fonte: Autor (2026)

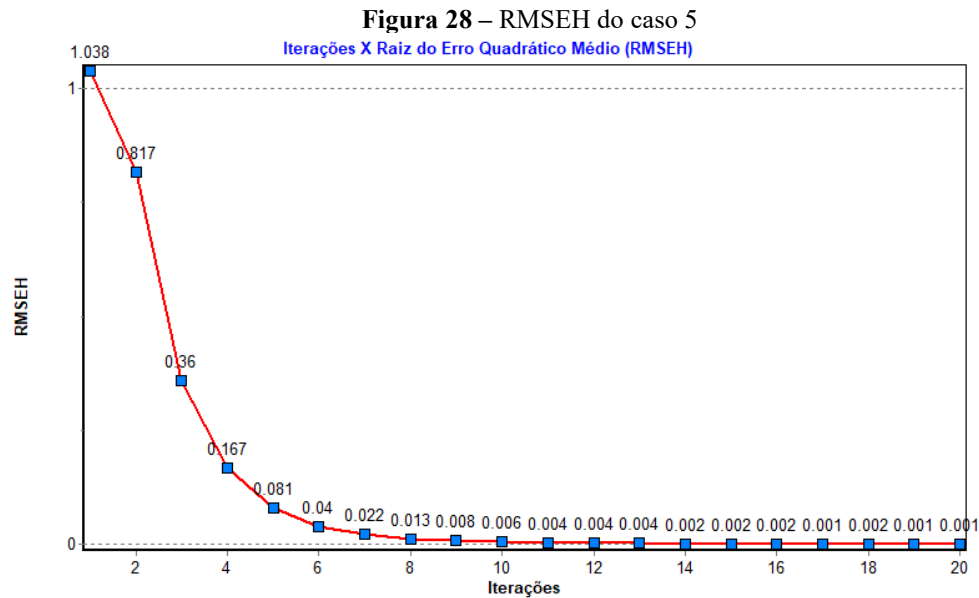
Os resultados apresentam estabilidade e tendência assintótica para o erro mínimo absoluto.

O RMSEH apresentou valores finais próximos a zero tendo os três últimos valores se estabilizado em 0,002. Já quanto a medidas da média do ângulo formado pelos vetores do gradiente hidráulico observado e calculado, embora estas não tenham gerado valores exatamente iguais, seus resultados são bem próximos, sendo o último 0,115.

4.1.5 Caso 5

4.1.5.1 Raiz do erro quadrático médio (RMSEH)

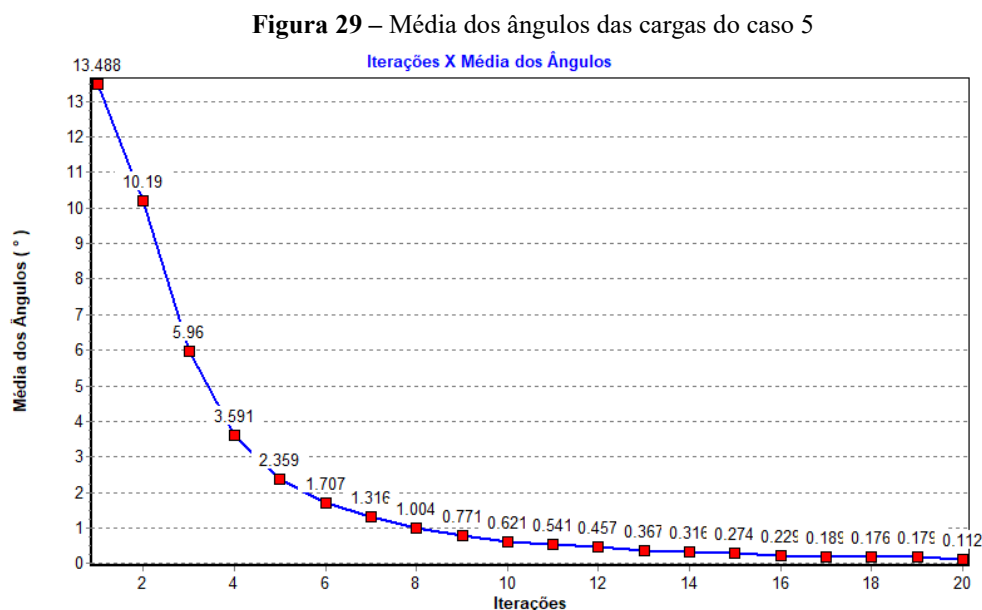
O gráfico da raiz do erro quadrático médio para cada iteração do caso 5 está exposto na figura 28:



Fonte: Autor (2026)

4.1.5.2 Ângulo formado por vetores do gradiente hidráulico observado e calculado

O gráfico da raiz do ângulo formado por vetores do gradiente hidráulico observado e calculado para cada iteração do caso 5 está exposto na figura 29:



Fonte: Autor (2026)

Os resultados apresentam estabilidade e tendência assintótica para o erro mínimo absoluto.

O RMSEH apresentou valores finais próximos a zero tendo os três últimos valores se estabilizado em 0,001. Já quanto a medidas da média do ângulo formado pelos vetores do gradiente hidráulico observado e calculado, embora estas não tenham gerado valores exatamente iguais, seus resultados são bem próximos, sendo o último 0,112.

4.1.6 Resumo

A tabela 2 traz um resumo dos valores exatos da raiz do erro quadrático médio e da média do ângulo formado pelos vetores do gradiente hidráulico observado e calculado na calibração número 20 em cada um dos casos estudados:

Tabela 2 – Resumo da RMSEH e da média dos ângulos em cada caso

Casos	RMSEH	Média ângulos
Caso 1	0,002133	0,104574
Caso 2	0,001405	0,133944
Caso 3	0,001521	0,118505
Caso 4	0,001642	0,114731
Caso 5	0,000831	0,112133

Fonte: Autor (2026)

Observa-se que as variações apontam, em primeira instância, para o caso 5 sendo mais bem-sucedido na minimização da RMSEH e o caso 1 retornando melhor média dos ângulos formado pelos vetores do gradiente hidráulico observado e calculado.

Nota-se que, porém, numa análise mais minuciosa que dos casos 2, 3 e 5 a RMSEH oscilou entre 0,002 e 0,001 com tendência progressiva para redução do valor em 0,001. Isso pode indicar que, na iteração 20, o valor de tal parâmetro poderia, para um dos casos, estar no “pico” dessa oscilação, mascarando o resultado.

A mesma constatação pode ser feita para os casos 2, 3 e 5 no que tange ao valor da média dos ângulos formado pelos vetores do gradiente hidráulico observado e calculado.

Os casos que se saíram melhor foram os extremos: sem zoneamento para a RMSEH e com o maior número de zonas para a média dos ângulos.

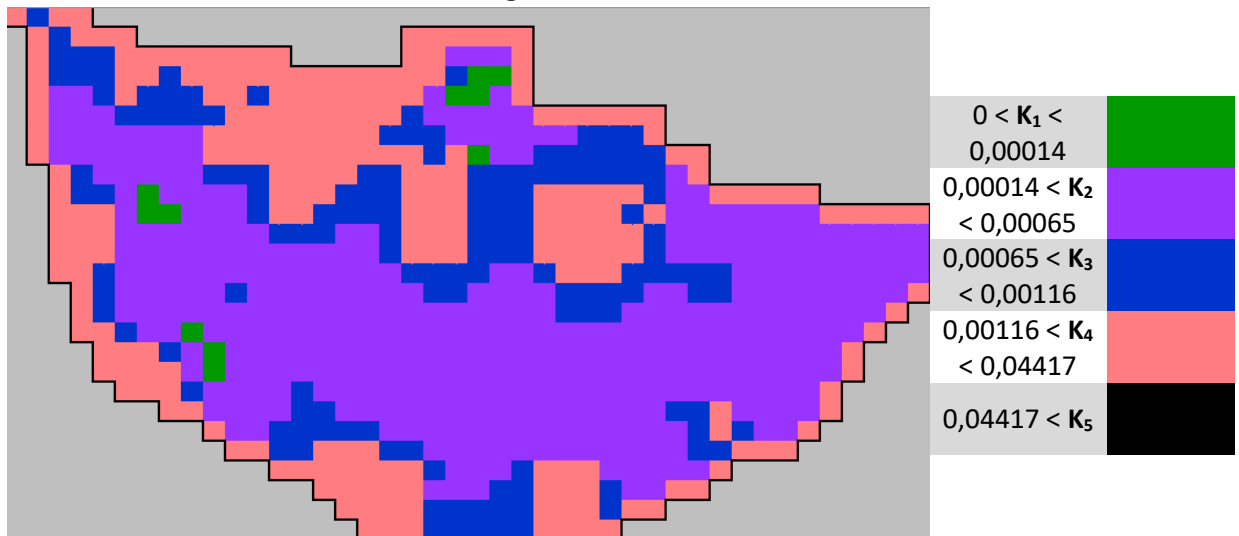
4.2 Valores de K e análise da média e coeficiente de variação

Os resultados dos valores de K estão apresentados para a correção realizada na 20ª iteração, sendo esta correspondente à última da análise. Os mapas representam intervalos de valores de condutividade hidráulica, uma vez que o processo iterativo retorna, célula a célula, números específicos para cada ponto analisado. Dessa forma, não há repetição da condutividade hidráulica em nenhum dos casos avaliados. Os intervalos considerados foram aproveitados do trabalho do Tavares (2010).

4.2.1 Caso 1

Mantendo as divisões das zonas dos valores de entrada, a condutividade hidráulica horizontal no caso 1 é, para a vigésima iteração (K20) conforme a figura 30:

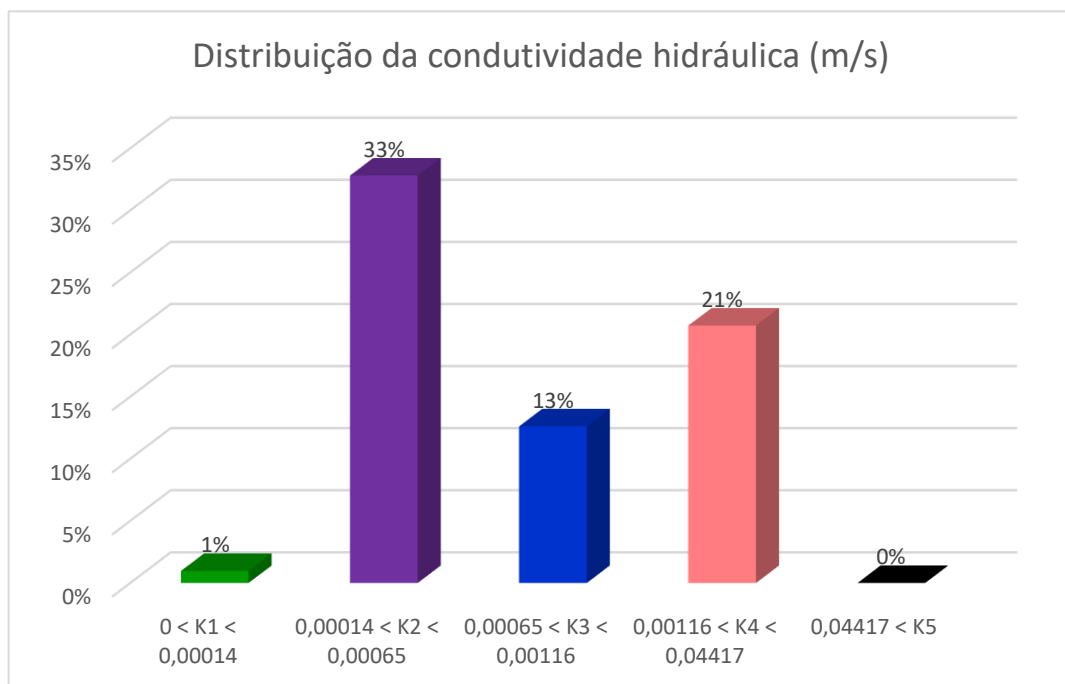
Figura 30 – K20, caso 1



Fonte: Autor (2026)

A distribuição percentual, usando como divisão os mesmos intervalos, está apresentada na figura 31:

Figura 31 – Distribuição percentual K20, caso 1



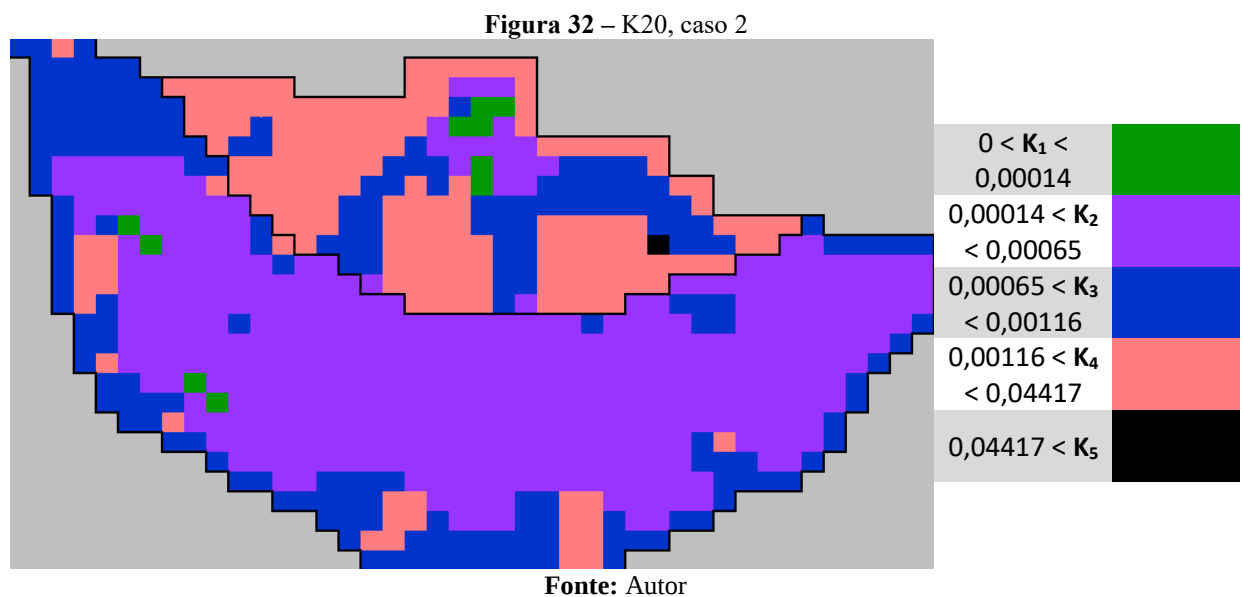
Fonte: Autor (2026)

Há um predomínio da faixa dos valores de “K” situados entre 0,00014m/s e 0,00065m/s de 33%. Este panorama já era esperado, pois, tal qual foi visto na figura 30, a camada roxa (representação da faixa 0,00014 m/s < K < 0,00065m/s) abrange maior parte da área. No mais, para 1% da área de células ativas, o valor se situou entre 0m/s e 0,00014m/s, pelo que se vê nas poucas células verdes (representação da faixa 0m/s < K < 0,00014m/s) espalhadas no mapa.

Adicionalmente, 13% das células ativas estão na faixa de 0,00065m/s e 0,00116m/s, sendo estas, notadas na cor azul na figura 30. Prosseguindo, 21% das células tem condutividade hidráulica entre 0,00116m/s e 0,04417m/s, uma vez que estas são observadas pela cor rosa no mapa, especialmente, nas regiões de contorno. Por fim, condutividades maiores que 0,04417m/s não foram encontradas.

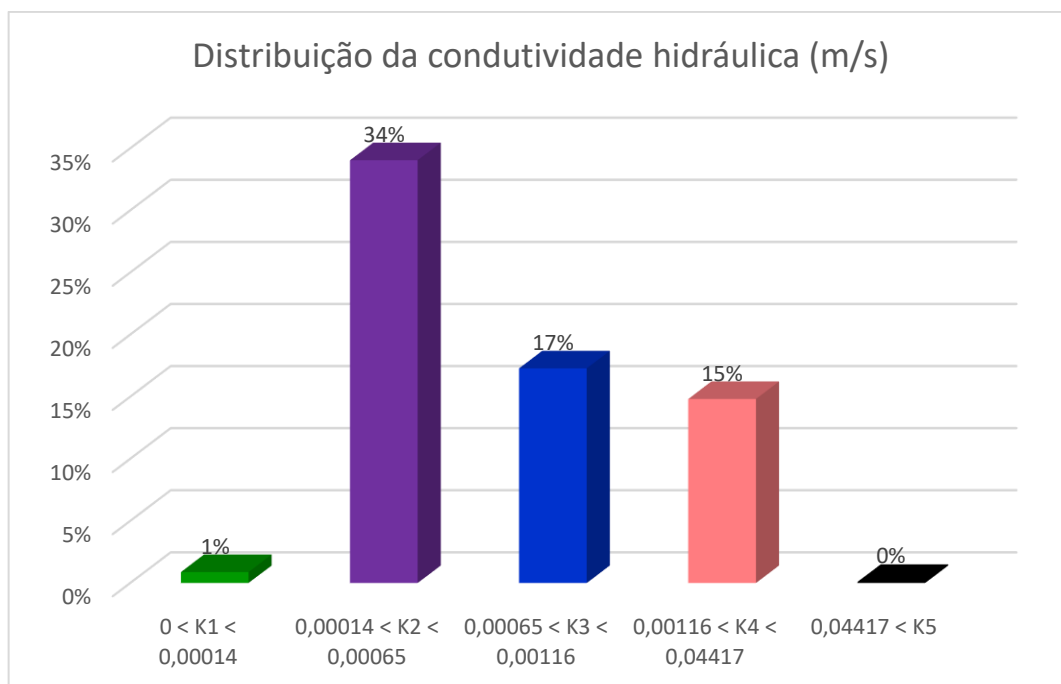
4.2.2 Caso 2

Mantendo as divisões das zonas dos valores de entrada, a condutividade hidráulica horizontal no caso 2 é, para a vigésima iteração (K20) conforme a figura 32:



A distribuição percentual, usando como divisão os mesmos intervalos, está apresentada na figura 33:

Figura 33 – Distribuição percentual K20, caso 2



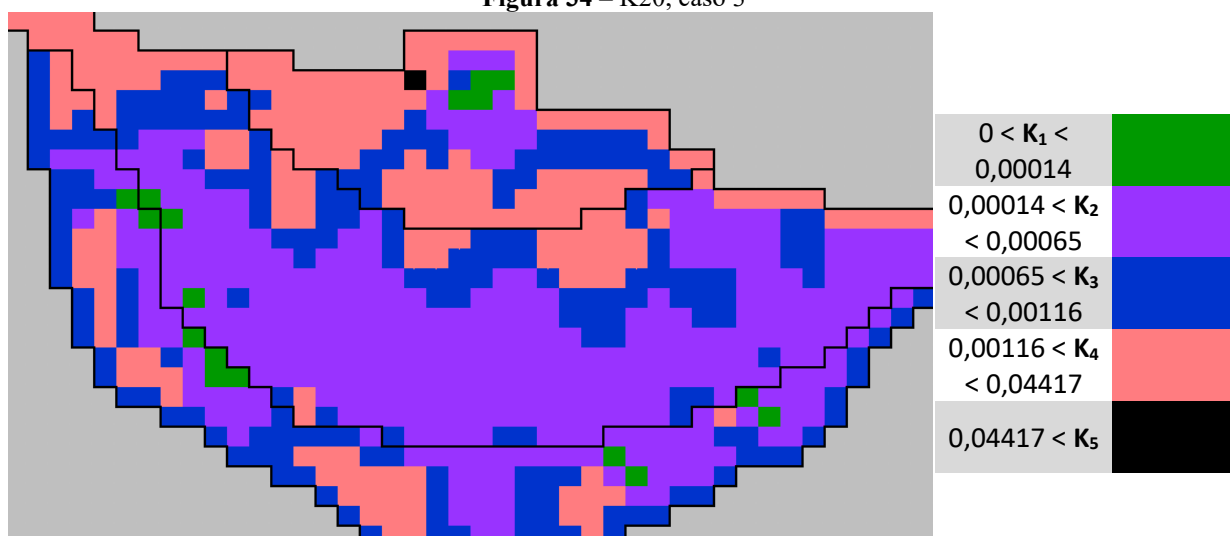
Fonte: Autor (2026)

Há um predomínio da faixa dos valores de “K” situados entre 0,00014m/s e 0,00065m/s de 34%, isto é, 1% maior que o caso 1. Este panorama já era esperado, pois, tal qual foi visto na figura 32, a camada roxa (representação da faixa 0,00014 m/s < K < 0,00065m/s) abrange maior parte da área. No mais, para os mesmos 1% da área de células ativas, o valor se situou entre 0m/s e 0,00014m/s, pelo que se vê nas poucas células verdes (representação da faixa 0m/s < K₂ < 0,00014m/s) espalhadas no mapa. Adicionalmente, houve um crescimento para 17% das células ativas que estão na faixa de 0,00065m/s e 0,00116m/s, sendo estas, notadas na cor azul na figura 32. Prosseguindo, 15% das células tem condutividade hidráulica entre 0,00116m/s e 0,04417m/s, sendo estas observadas pela cor rosa no mapa, especialmente, na porção superior. Por fim, uma única célula com condutividade maior que 0,04417m/s foi encontrada.

4.2.3 Caso 3

Mantendo as divisões das zonas dos valores de entrada, a condutividade hidráulica horizontal no caso 3 é, para a vigésima iteração (K20) conforme a figura 34:

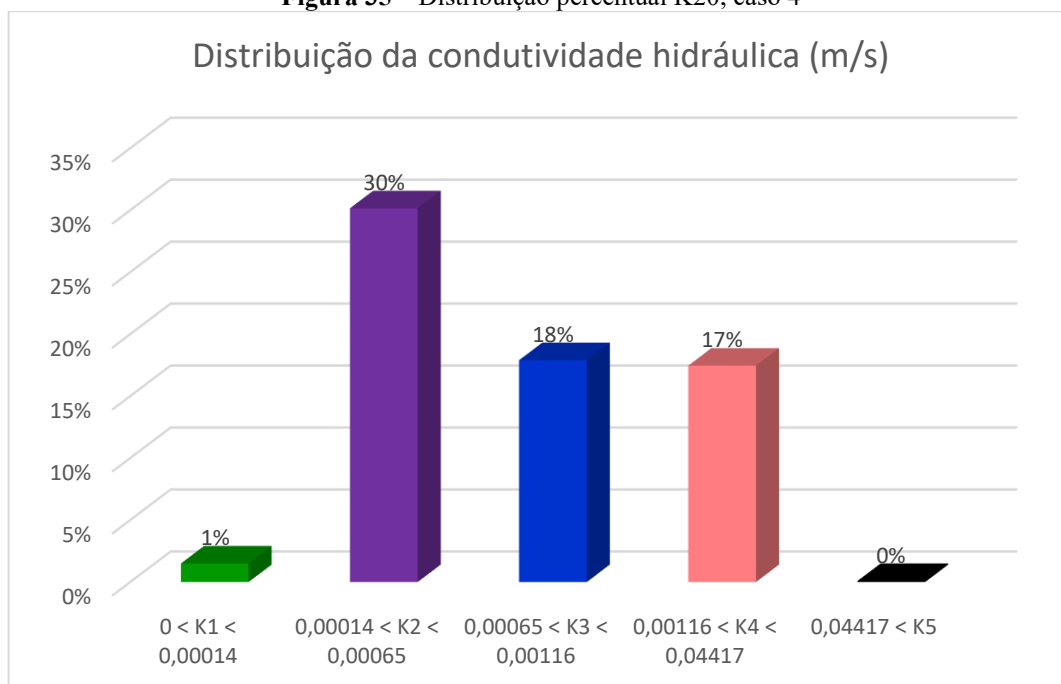
Figura 34 – K20, caso 3



Fonte: Autor (2026)

A distribuição percentual, usando como divisão os mesmos intervalos, está apresentada na figura 35:

Figura 35 – Distribuição percentual K20, caso 4



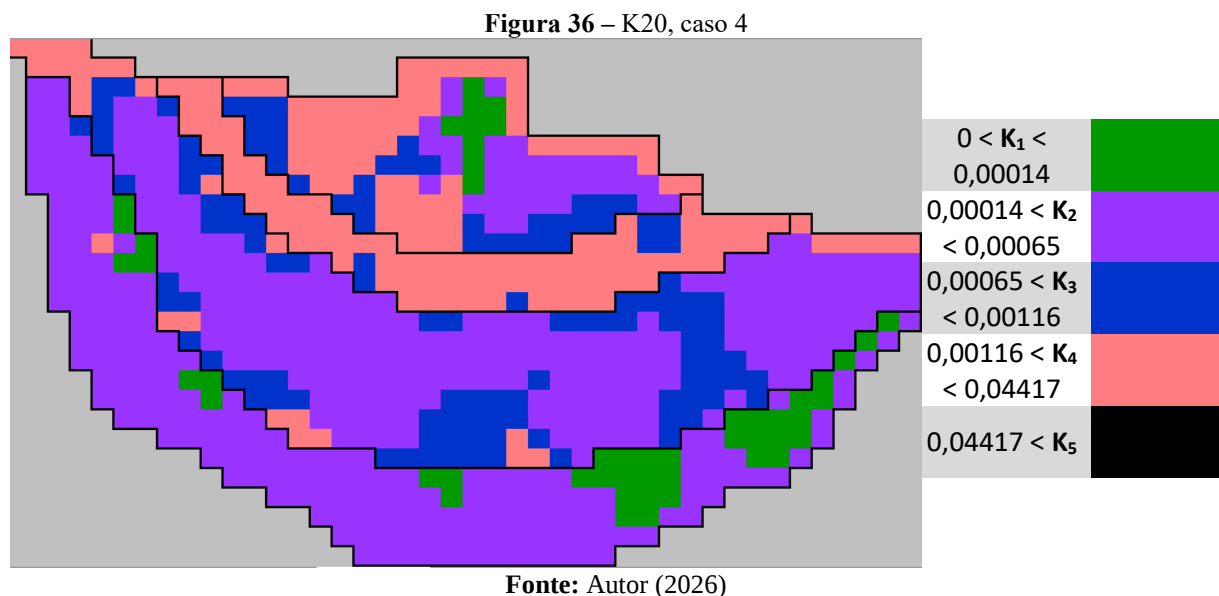
Fonte: Autor (2026)

Há um predomínio da faixa dos valores de “K” situados entre 0,00014m/s e 0,00065m/s de 30%, indicando redução em relação a ambos os casos anteriores (1 e 2). Porém, este panorama de preponderância já era esperado, pois, tal qual foi visto na figura 34, a camada roxa (representação da faixa $0,00014 \text{ m/s} < K_2 < 0,00065 \text{ m/s}$) abrange maior parte da área. No mais, para os mesmos 1% da área de células ativas, o valor se situou entre 0m/s e 0,00014m/s, pelo

que se vê nas poucas células verdes (representação da faixa $0\text{m/s} < K < 0,00014\text{m/s}$) espalhadas no mapa. Adicionalmente, houve um crescimento para 18% das células ativas que estão na faixa de $0,00065\text{m/s}$ e $0,00116\text{m/s}$, sendo estas, notadas na cor azul na figura 34. Prosseguindo, 17% das células tem condutividade hidráulica entre $0,00116\text{m/s}$ e $0,04417\text{m/s}$, sendo estas observadas pela cor rosa no mapa. Nota-se que os intervalos de $0,00065\text{m/s} < K < 0,00116\text{m/s}$ e $0,00116\text{m/s} < K < 0,04417\text{m/s}$ apresentaram distribuição quase equivalente. Por fim, uma única célula com condutividade maior que $0,04417\text{m/s}$ foi encontrada.

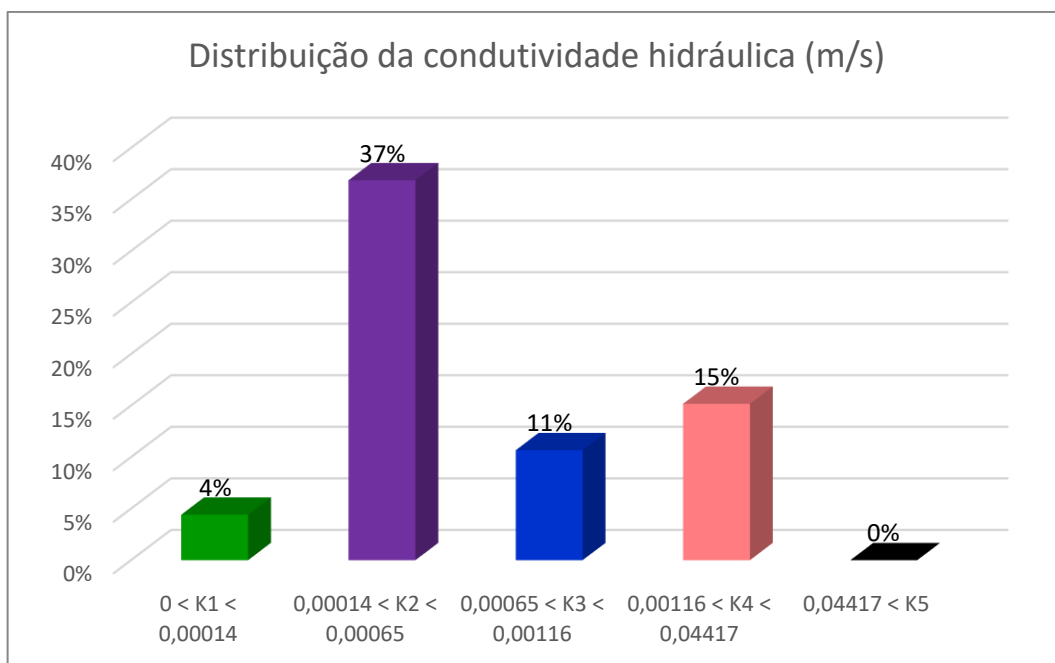
4.2.1 Caso 4

Mantendo as divisões das zonas dos valores de entrada, a condutividade hidráulica horizontal no caso 4 é, para a vigésima iteração (K20) conforme a figura 36:



A distribuição percentual, usando como divisão os mesmos intervalos, está apresentada na figura 37:

Figura 37 – Distribuição percentual K20, caso 4



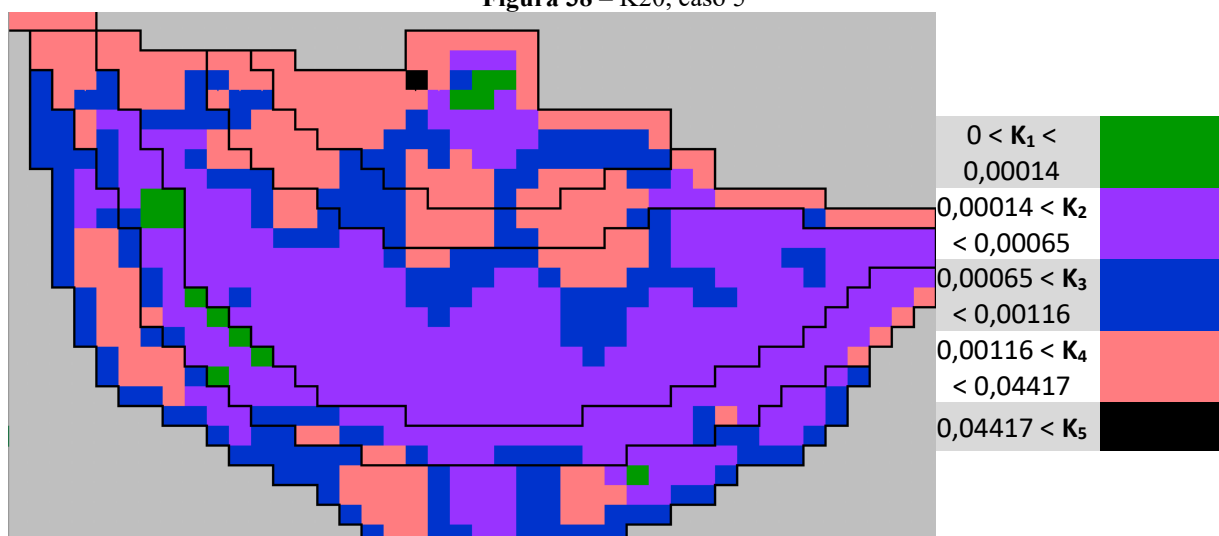
Fonte: Autor (2026)

Há um predomínio da faixa dos valores de “K” situados entre 0,00014m/s e 0,00065m/s de 37%. Este panorama já era esperado, pois, tal qual foi visto na figura 36, a camada roxa (representação da faixa 0,00014 m/s < K < 0,00065m/s) abrange maior parte da área. No mais, para 4% da área de células ativas, o valor se situou entre 0m/s e 0,00014m/s, pelo que se vê no aumento das células verdes (representação da faixa 0m/s < K < 0,00014m/s) espalhadas no mapa. Adicionalmente, houve uma redução para 11% das células ativas que estão na faixa de 0,00065m/s e 0,00116m/s, sendo estas, notadas na cor azul na figura 36. Prosseguindo, 15% das células tem condutividade hidráulica entre 0,00116m/s e 0,04417m/s, sendo estas observadas pela cor rosa no mapa, especialmente, na porção superior. Por fim, nenhuma célula com condutividade maior que 0,04417m/s foi encontrada.

4.2.5 Caso 5

Mantendo as divisões das zonas dos valores de entrada, a condutividade hidráulica horizontal no caso 4 é, para a vigésima iteração (K20) conforme a figura 38:

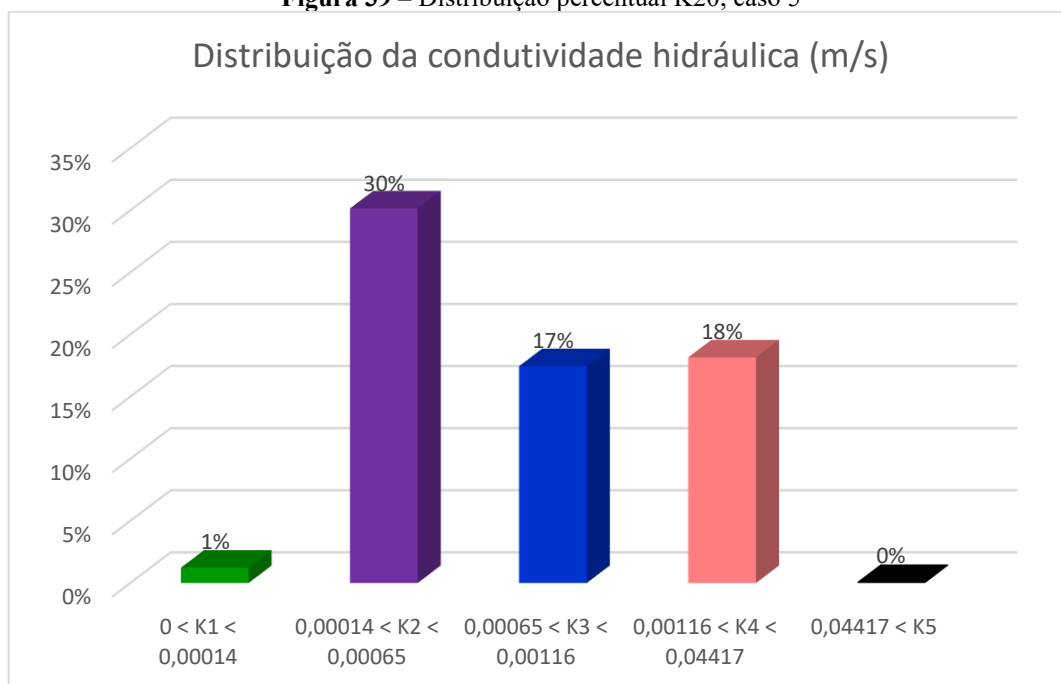
Figura 38 – K20, caso 5



Fonte: Autor (2026)

A distribuição percentual, usando como divisão os mesmos intervalos, está apresentada na figura 39:

Figura 39 – Distribuição percentual K20, caso 5



Fonte: Autor (2026)

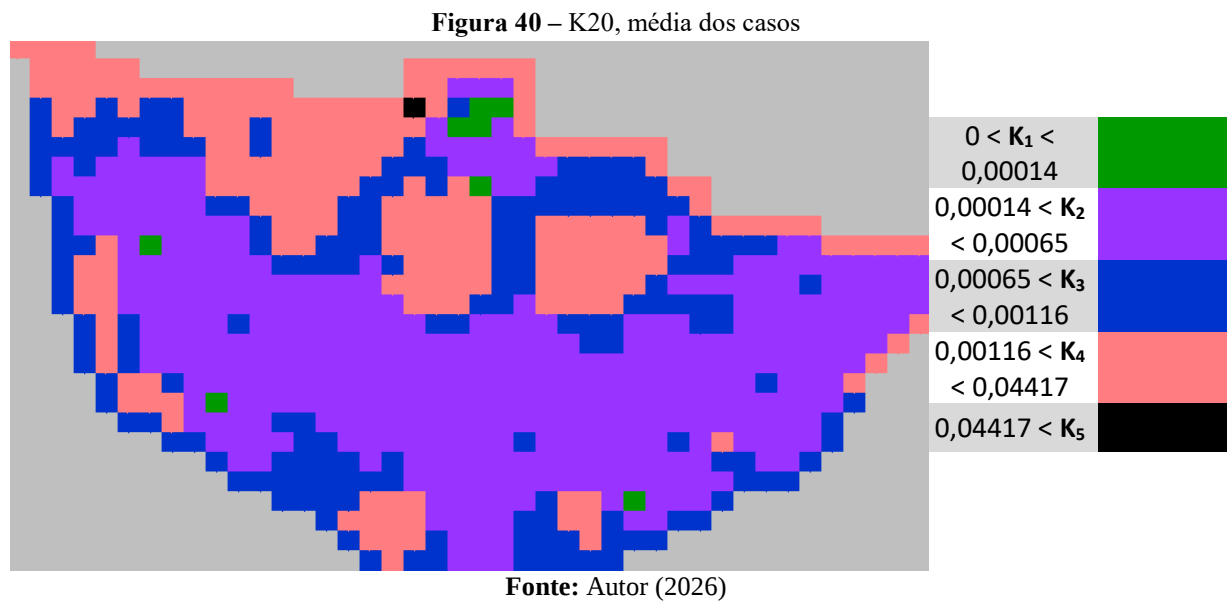
Há um predomínio da faixa dos valores de “K” situados entre 0,00014m/s e 0,00065m/s de 30%, indicando redução em relação aos casos anteriores (1, 2 e 4). Porém, este panorama de preponderância já era esperado, pois, tal qual foi visto na figura 38, a camada roxa (representação da faixa $0,00014 \text{ m/s} < K_2 < 0,00065 \text{ m/s}$) abrange maior parte da área. No mais, para os mesmos 1% da área de células ativas, o valor se situou entre 0m/s e 0,00014m/s, pelo

que se vê nas poucas células verdes (representação da faixa $0\text{m/s} < K < 0,00014\text{m/s}$) espalhadas no mapa. Adicionalmente, houve um crescimento para 17% das células ativas que estão na faixa de $0,00065\text{m/s}$ e $0,00116\text{m/s}$, sendo estas, notadas na cor azul na figura 38. Prosseguindo, 18% das células tem condutividade hidráulica entre $0,00116\text{m/s}$ e $0,04417\text{m/s}$, sendo estas observadas pela cor rosa no mapa. Nota-se que os intervalos de $0,00065\text{m/s} < K < 0,00116\text{m/s}$ e $0,00116\text{m/s} < K < 0,04417\text{m/s}$ apresentaram distribuição quase equivalente. Por fim, uma única célula com condutividade maior que $0,04417\text{m/s}$ foi encontrada.

Observa-se que embora os mapas dos casos 3 e 5 tenham singela diferença, a distribuição percentual é exatamente igual, indicando proximidade entre as iterações em ambos os casos, explicada pela pequena diferença nos valores da condutividade hidráulica inicial.

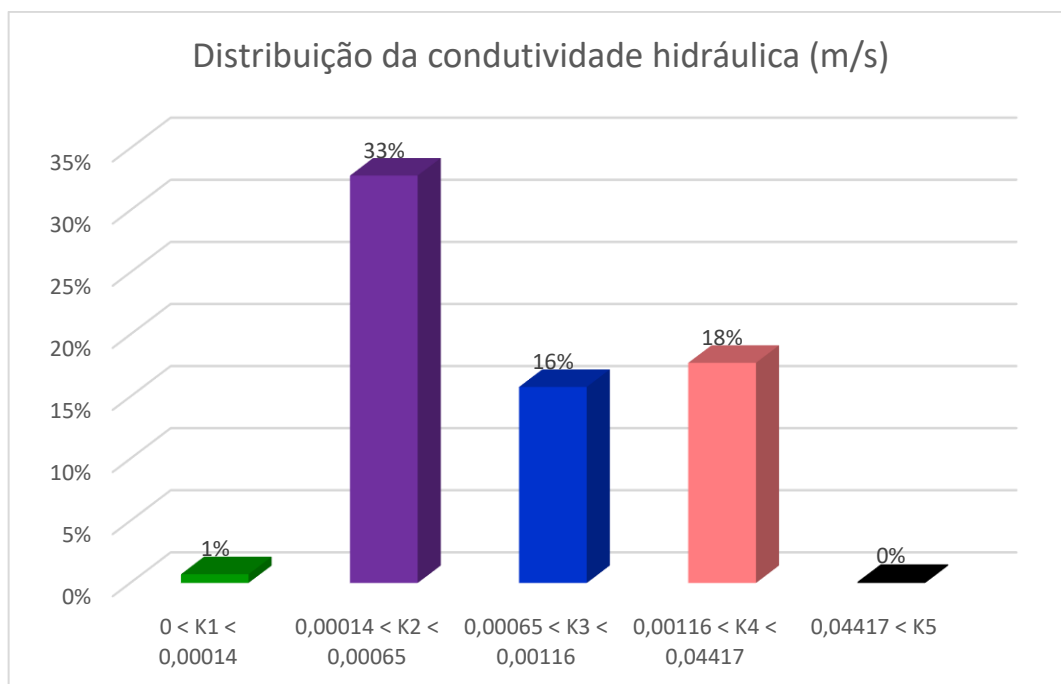
4.2.6 Média e coeficiente de variação

Foi realizada uma análise da média simples entre os 5 cenários com o intuito de ter ciência de qual resultado as cinco situações giram em torno. A média das condutividades hidráulicas horizontais de todos os casos na vigésima iteração (K20) é, consoante a figura 40:



A distribuição percentual, usando como divisão os mesmos intervalos, está apresentada na figura 41:

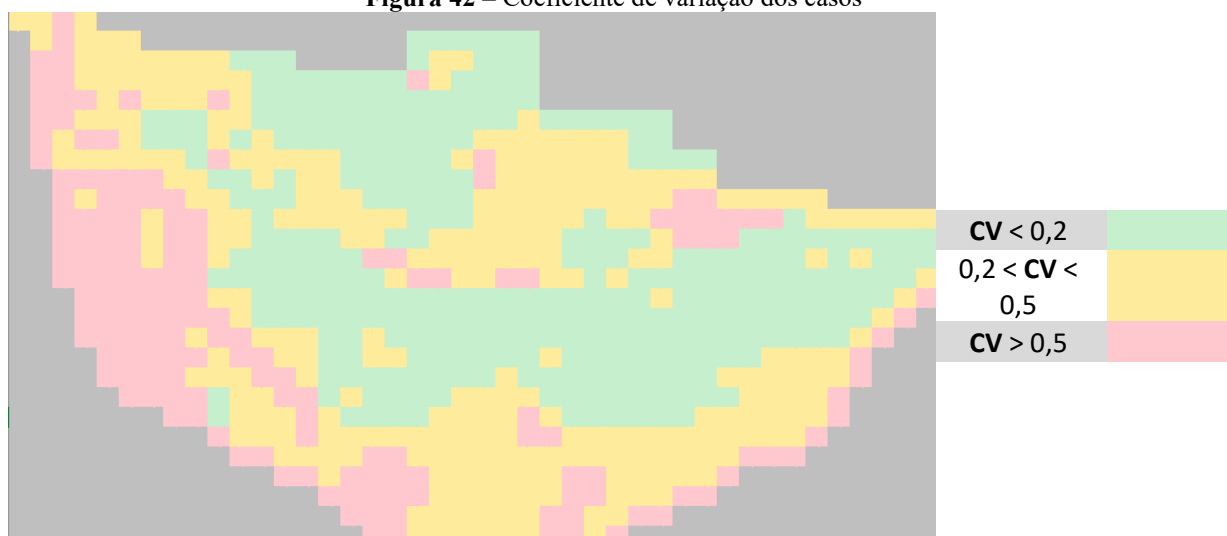
Figura 41 – Distribuição percentual K20, média dos casos



Fonte: Autor (2026)

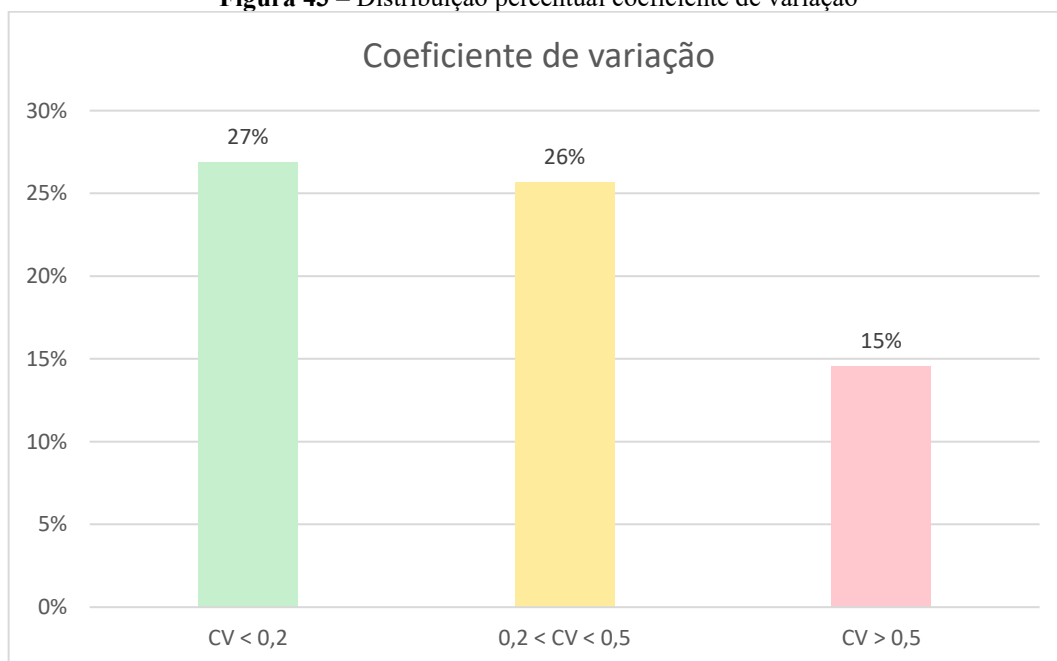
Há um predomínio da faixa dos valores de “K” situados entre 0,00014m/s e 0,00065m/s de 33%. Este panorama de predominância já era esperado, pois, tal qual foi visto na figura 40, a camada roxa (representação da faixa 0,00014 m/s < K_2 < 0,00065m/s) abrange maior parte da área. No mais, para os mesmos 1% da área de células ativas, o valor se situou entre 0m/s e 0,00014m/s, pelo que se vê nas poucas células verdes (representação da faixa 0m/s < K < 0,00014m/s) espalhadas no mapa. Adicionalmente, há 16% de células ativas que estão na faixa de 0,00065m/s e 0,00116m/s, sendo estas, notadas na cor azul na figura 40. Prosseguindo, 18% das células tem condutividade hidráulica entre 0,00116m/s e 0,04417m/s, sendo estas observadas pela cor rosa no mapa. Nota-se que os intervalos de 0,00065m/s < K < 0,00116m/s e 0,00116m/s < K < 0,04417m/s apresentaram distribuição quase equivalente. Por fim, uma única célula com condutividade maior que 0,04417m/s foi encontrada.

O coeficiente de variação dos valores dos casos analisados está na figura 42:

Figura 42 – Coeficiente de variação dos casos

Fonte: Autor (2026)

A distribuição percentual, usando como divisão os mesmos intervalos, está apresentada na figura 43:

Figura 43 – Distribuição percentual coeficiente de variação

Fonte: Autor (2026)

Os resultados do coeficiente de variação indicam, em primeira análise, que 27% das células do modelo são estáveis indicando robustez à calibração e em 15% destas há incerteza no valor de “K”, isto é, variam em taxa maior a esperada ao valor da média. Já em 26% das unidades quadriculadas, não é possível determinar se a calibração é robusta ou sensível.

4.2.6 Resumo

A tabela 3 traz um resumo comparativo, coluna a coluna da distribuição percentual de cada intervalo de condutividade conforme os casos analisados:

Tabela 3 – Resumo distribuição percentual dos intervalos dos valores de condutividade hidráulica

Casos	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso média
$0 < K_1 < 0,00014$	1%	1%	1%	4%	1%	1%
$0,00014 < K_2 < 0,00065$	33%	34%	30%	37%	30%	33%
$0,00065 < K_3 < 0,00116$	13%	17%	18%	11%	17%	16%
$0,00116 < K_4 < 0,04417$	21%	15%	17%	15%	18%	18%
$0,04417 < K_5$	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Fonte: Autor (2026)

Percebe-se tendência, em todos os casos ao intervalo 0,00014m/s - 0,00065m/s, o qual apresenta-se em, pelo menos, 30% das células.

O intervalo 0,00065m/s - 0,00116m/s girou em torno de 11% a 18% (sete pontos percentuais) das células do modelo.

O intervalo 0,00116m/s - 0,04417m/s foi de 15% a 21%, variação dos mesmos pontos percentuais do intervalo acima.

O intervalo 0m/s - 0,00014m/s teve seu maior valor, 4%, no primeiro caso. Já nos demais não passou de 1%.

É importante observar que apenas uma célula nos casos 2, 3 e 5 apresentou valor maior que 0,04417m/s. Para um modelo com 1.134 células, tal surgimento é, em primeira análise, de ínfima importância. Porém, é importante ressaltar que esta célula pode gerar colapso nas iterações caso sua tendência seja de crescimento.

4.3 Teste de Kruskal-Wallis e post-doc de Dunn

As análises descritivas apresentadas no subtópico anterior indicaram variações nos valores de condutividade entre as calibrações realizadas. A fim de verificar se tais diferenças apresentam significância estatística, aplicou-se o teste de Kruskal-Wallis, cujos resultados são apresentados na tabela 4:

Tabela 4 – Resultado Kruskal-Wallis

H	54,47385454
Graus de liberdade	4
Valor-p	4,18765E-11
Alpha	0,05
Significância	SIM

Fonte: Autor (2026)

Complementando o teste de Kruskal-Wallis, foi feito o post-hoc de Dunn. Os resultados, par a par estão apresentados na tabela 5:

Tabela 5 – Resultado post-hoc Dunn

Grupo 1	Grupo 2	Valor-p
Caso 4	Caso 1	3,02852E-08
Caso 4	Caso 2	7,44775E-05
Caso 4	Caso 3	2,73343E-10
Caso 4	Caso 5	1,43132E-09
Caso 1	Caso 2	0,114503351
Caso 1	Caso 3	0,439280334
Caso 1	Caso 5	0,608554999
Caso 2	Caso 3	0,018688839
Caso 2	Caso 5	0,036581142
Caso 3	Caso 5	0,793882862

Fonte: Autor (2026)

O teste de Kruskal-Wallis mostrou que há diferenças significativas entre os grupos. Sendo $p < 0,05$, a hipótese nula (H_0) é descartada e os valores de “K” não são estatisticamente próximos entre os cenários. Sendo assim, a hipótese “ H_1 ” é aceita e existe pelo menos uma calibração diferente das demais.

O post-hoc de Dunn revelou que há diferenças entre: os casos 4 e todos os demais, casos 2 e 3 e casos 2 e 5. Além disso, ele indicou que não há diferenças entre os demais grupos.

4.4 Valores da carga hidráulica

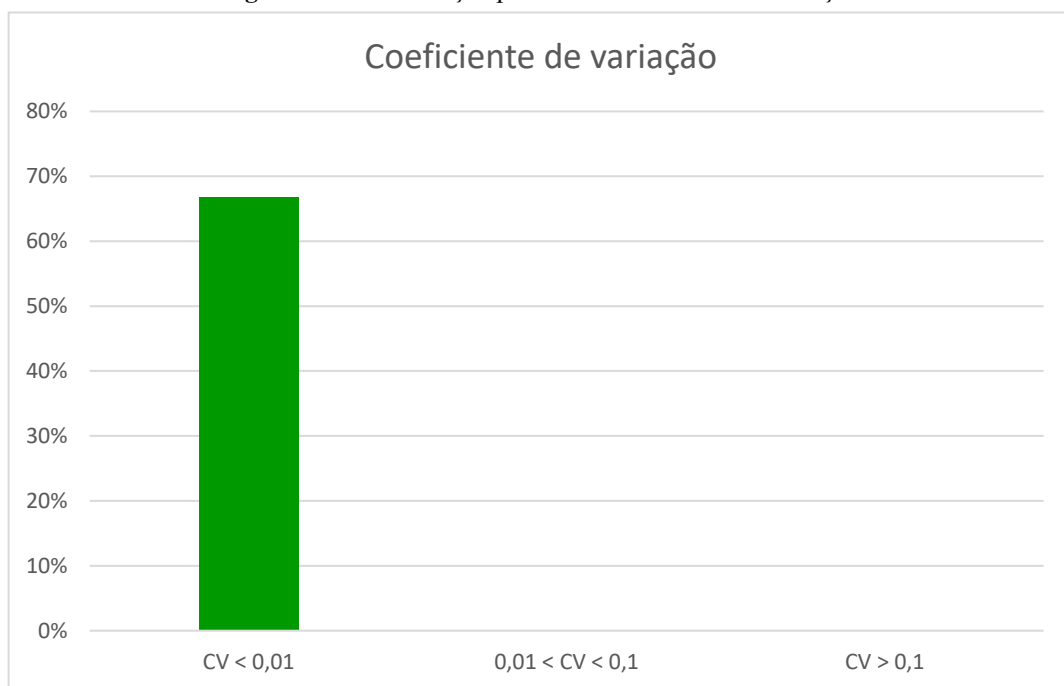
Os resultados dos valores da carga hidráulica são os calculados na vigésima iteração. Sendo o foco do trabalho verificar a sensibilidade do modelo mediante os dados de entrada das condutividades hidráulicas, não serão verificados os valores da carga hidráulica caso a caso, e sim o coeficiente de variação entre os cinco casos.

O coeficiente de variação dos valores dos casos analisados está exposto na figura 44:

Figura 44 – Coeficiente de variação da carga hidráulica dos casos

Fonte: Autor (2026)

A distribuição percentual, usando como divisão os mesmos intervalos, está apresentada na figura 45:

Figura 45 – Distribuição percentual coeficiente de variação

Fonte: Autor

Nota-se, portanto, que todas as células ativas do modelo apresentam um valor menor que 0,01 de coeficiente de variação para a condutividade hidráulica no modelo não fixo. Tal fato indica robustez notável do sistema aos dados da condutividade hidráulica de entrada.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mediante os resultados apresentados no tópico anterior, conclui-se que o modelo proposto pelo UFC-MIGH para os valores de carga hidráulica não é sensível aos valores de entrada da condutividade hidráulica horizontal. Tal comportamento é observado pelos baixos valores dos coeficientes de variação da carga hidráulica do modelo não fixo já na iteração 20. Os resultados de $CV < 0,01$ indicam dispersão estatística consideravelmente baixa, isto é, apesar dos valores diferentes de condutividade hidráulica de entrada, o sistema convergiu para os mesmos valores de carga.

Já em relação aos valores do coeficiente de permeabilidade, observou-se sensibilidade do processo de calibração tanto apresentando notável dispersão de valores apontada pela análise descritiva, como demonstrando que as diferenças dos resultados possuíam significância estatística.

Quanto aos valores de RMSEH e a média dos ângulos do gradiente hidráulico, notou-se diferença ínfima entre os casos.

Em um cenário ideal, uma calibração perfeita retorna o mesmo valor independente do valor de entrada. O que se observa na prática, todavia, é que o processo de calibração contém hipóteses e simplificações que são aproximações diante da impossibilidade de uma resposta exata. O que se esperava dessa avaliação era precisar qual é o efeito e o quanto este interfere no resultado final e, portanto, na validade do modelo. Dessa forma, o modelo mostrou-se suficientemente robusto para aproximação das cargas, independente dos valores da condutividade hidráulica.

Porém, uma análise crítica permite inferir que apesar do método gerar confluência numérica, os valores não são respostas absolutas, ou seja, os valores calibrados de condutividade hidráulica devem ser interpretados como parâmetros ajustados ao comportamento numérico do modelo, não necessariamente correspondendo de forma direta aos valores físicos reais do meio. Diferentes valores “K” geraram um campo potenciométrico semelhante.

A resposta do modelo, no entanto, satisfaz o problema a que se propõe. Diante das muitas aproximações feitas para transformar o modelo físico num modelo numérico, os valores da calibração não estão alinhados com a realidade física, e sim com a realidade numérica. Portanto, uma correspondência exata entre os valores calibrados e os valores reais do solo exigiria que o modelo representasse com elevada precisão todas as variáveis envolvidas no escoamento subterrâneo. Por isso, embora os valores de “K” apresentem variações locais entre

os cenários analisados, o comportamento global do modelo converge para respostas hidráulicas semelhantes, indicando compensações espaciais nos parâmetros calibrados.

Apesar da condutividade hidráulica ser um parâmetro que, de acordo com os dados de entrada, apresenta diferentes resultados finais, sua influência dentro do modelo mostrou ser adaptável para gerar um campo potenciométrico semelhante.

Recomenda-se que tal verificação seja feita com outros distintos valores “K” de entrada, cujas comparações não venham de correlações entre os casos e sim como valores arbitrários para o modelo.

Além disso, recomenda-se repetir tais testes em diferentes modelos matemáticos, com diferentes condições de contorno, recarga e sumidouro, e outras vazões e cargas para os poços de monitoramento e observação.

Por fim, é válida a tentativa de repetir o teste diminuindo a quantidade de poços de monitoramento cujas cargas são fixas, para observar se um espaçamento maior entre os poços, ainda permite multiplicidade de respostas de calibrações e valores de carga tão semelhantes.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, M. P.; WOESSNER, W. W.; HUNT, R. J. **Applied groundwater modeling: simulation of flow and advective transport**. 2. ed. Academic press, 2015.
- BACK, Allison Fernando. **Modelagem numérica de fluxo das águas subterrâneas no campus da Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria – RS**. 2020. 61 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2020.
- CARVALHO, Ana Maciel de. **Modelagem numérica como ferramenta para a gestão das águas subterrâneas em São José do Rio Preto (SP)**. 2013. 171 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Instituto de Geociências, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.
- COSTA, Israel de Oliveira. **Calibração da Condutividade Hidráulica de Aquíferos Utilizando o Método Iterativo do Gradiente Hidráulico**. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Fortaleza, 2014.
- FEITOSA, Fernando A. C.; FILHO, João Manoel; FEITOSA, Edilton Carneiro; DEMETRIO, Gelson A. (orgs.). **Hidrogeologia: conceitos e aplicações**. 3. ed. rev. e ampl. Rio de Janeiro: CPRM, 2008.]
- FREEZE, Allan R.; CHERRY, John A. **Águas subterrâneas**. Tradução de Everton de Oliveira *et al.*; coordenação de Everton de Oliveira. São Paulo: Everton de Oliveira, 2017. 698 p. Tradução de: *Groundwater*. ISBN 978-85-94189-00-4.
- KRESIC, N.; MIKSZEWSKI, A. **Hydrogeological conceptual site models: data analysis and visualization**. Boca Raton: CRC Press, 2013. 584 p.
- MADUREIRA, Helena. **Os tempos dos rios e das cidades**. *Revista Convergência Crítica*, v. 1, n. 7, jan. 2015. DOI: 10.22409/convergenciacritica2015.v1i7.a22106. Disponível em:

<https://www.researchgate.net/publication/301219324> Os tempos dos rios e das cidades.

Acesso em: 13 out. 2025.

MCDONALD, M. G.; HARBAUGH, A. W. **A modular three-dimensional finitedifference ground-water flow model**. U.S. Geological Survey, v. 6, n. A1, 576 p., 1988.

QUEIROZ, Erlandson de Vasconcelos. **Modelagem computacional de águas subterrâneas: problema inverso utilizando o método iterativo de gradiente hidráulico e sistemas de informações geográficas**. 2016. 64 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental, Fortaleza, 2016.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. **Relatório da UNESCO destaca águas subterrâneas como solução para crise hídrica**. Brasília: ONU Brasil, 2022. Disponível em: <https://brasil.un.org/pt-br/175523-relat%C3%B3rio-da-unesco-destaca-%C3%A1guas-subterr%C3%A2neas-como-solu%C3%A7%C3%A3o-para-crise-h%C3%ADdrica>. Acesso em: 6 out. 2025.

REBOUÇAS, A. C. **Águas Subterrâneas**. In: REBOUÇAS, A. C.; BRAGA, B; TUNDISI, J.G. (Orgs). **Águas doces no Brasil: Capital ecológico, uso e conservação**. 3. ed. São Paulo: Escrituras editora, 2006.

SCHUSTER, Hans Dieter Max; ARAÚJO, Hélio Darlan Barros. **Uma Formulação Alternativa do Método Iterativo de Gradiente Hidráulico no Procedimento de Calibração dos Parâmetros Hidrodinâmicos do Sistema Aquífero**. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v. 9, n. 2, p. 31-37, abr./jun. 2004.

TAVARES, P. R. L. **Modelagem Computacional e Calibração da Condutividade Hidráulica Horizontal em Aquífero na Bacia Sedimentar do Araripe Utilizando o Método**

Iterativo do Gradiente Hidráulico. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Ceará, 2010.

VILLAR, Pilar Carolina. **As águas subterrâneas e o direito à água em um contexto de crise.** Ambiente & Sociedade, São Paulo, v. 19, n. 1, p. 83-102, mar. 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1809-4422ASOC150126R1V1912016>. Acesso em: 13 out. 2025.

ANEXO
DECLARAÇÃO

Declaro para os devidos fins que este Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia/Tese/Dissertação), escrito sob minha orientação, está em versão final, de acordo com as solicitações realizadas pela banca examinadora.

Informo também que procedi à revisão final do texto, constatando que atende às especificações das normas da ABNT para apresentação de trabalhos acadêmicos da UFCA, no que diz respeito ao conteúdo e à formatação.

Data e local da assinatura eletrônica



Documento assinado digitalmente

PAULO ROBERTO LACERDA TAVARES

Data: 01/06/2026 12:57:49-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>