



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI  
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**BRENO SILVA PEREIRA GONÇALVES**

**ANÁLISE DA INSTABILIDADE ELÁSTICA EM PÓRTICOS PLANOS:  
DESENVOLVIMENTO E VALIDAÇÃO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL.**

**JUAZEIRO DO NORTE**

**2026**

BRENO SILVA PEREIRA GONÇALVES

ANÁLISE DA INSTABILIDADE ELÁSTICA EM PÓRTICOS PLANOS:  
DESENVOLVIMENTO E VALIDAÇÃO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Civil do Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Francisco José Pereira de Almeida

JUAZEIRO DO NORTE

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Cariri  
Sistema de Bibliotecas

---

G635a Gonçalves, Breno Silva Pereira.

Análise da instabilidade elástica em pórticos planos: desenvolvimento e validação de uma ferramenta computacional / Breno Silva Pereira Gonçalves. – 2026. 67 f. : il. color.

Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Centro de Ciência e Tecnologia, Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, CE, 2026.

Orientador: Prof. Dr. Francisco José Pereira de Almeida

1. Estabilidade estrutural. 2. Flambagem. 3. Pórticos planos. 4. Análise matricial. 5. Método da Rigidez Direta. 6. Python. I. Almeida, Francisco José Pereira de (Orient.). II. Universidade Federal do Cariri. III. Título.

CDD 624.17

---

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

---

# *Análise da Instabilidade Elástica em Pórticos Planos: Desenvolvimento e Validação de uma Ferramenta Computacional*

*Breno Silva Pereira Gonçalves*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil. Área de concentração: Engenharia Civil.

Aprovada em 30 de março de 2026.

## Banca Examinadora

---

Francisco José Pereira de Almeida  
Orientador e Presidente da banca

---

Cleirton André Silva de Freitas  
1º Membro Examinador

---

Francisco Alex Correia Monteiro  
2º Membro Examinador

Em memória, ao meu avô, Abraão Gonçalves, com quem passei tardes de domingo fazendo contas de cabeça enquanto balançávamos nas redes de um alpendre, e à minha avó, Elenita Gonçalves, que nunca nos deixou faltar muito afeto e um bolinho de "caco"nessas tardes.

## AGRADECIMENTOS

Antes de revestir-me com os termos técnicos e seguir os ditames acadêmicos, aproveito a liberdade desta seção para falar daquilo que importa quando estamos sendo quem somos, em vez de sermos a função que exercemos no mundo ou o título que portamos nele; o tom poético e reflexivo é proposital, trata-se quase de um curto exercício do autor em encontrar-se consigo e estimular a mesma atitude para quem lê, lembrando a sua origem e as coisas que o constituem.

Graduar-me em engenharia é um sonho antigo, que, na verdade, foi sendo descoberto ao longo desses anos e teve sua origem na infância — época em que as telas ainda estavam distantes o suficiente para permitir a curiosidade de saber como as coisas funcionam. O ato de imaginar algo e conseguir reproduzir no mundo físico sempre me trouxe encanto e, assim, sem conhecer a figura do engenheiro, atestei enquanto criança que gostaria de ser inventor. Anos depois, com a soma de algumas experiências e a inevitável influência dos pais, agarrei a engenharia civil sem olhar para os demais caminhos. Hoje, prestes a realizar esse sonho, resgato o brilho daquela criança que gastava tardes de sua vida pensando engenhocas para fazer com garrafas PET e, finalmente, abro a lista de agradecimentos que acumulei nesse caminho.

Certa vez, ouvi da minha avó: "Tudo que você pedir e rezar a Deus, ele lhe dará", e, é bem verdade que incontáveis são as vezes em que pedi por essa graça que se concretiza. Assim, começo dedicando o maior desses agradecimentos a Deus, pois, parafraseando João Calvino, tudo que há de bom e virtuoso em mim provém dele, o restante é que sou eu.

Hoje, após algum pouco tempo vivido, também reconheço que eu nada seria se não fosse pela minha família, fundação imprescindível na vida de qualquer sujeito. Desse modo, agradeço aos meus pais, Silvio e Rachel, pela criação que me foi dada, na qual nada nunca me faltou e sempre sobrou amor e dedicação. Igualmente, agradeço à minha irmã Valentina, com quem eu compartilho uma relação ainda um tanto peculiar e um amor que o tempo revela nos detalhes.

Devo um sincero agradecimento a todos os meus amigos, que sempre foram e são, na minha vida, fonte de boas lembranças, parceria e acolhimento em momentos difíceis. Aqui o setor é grande, então por isso separo em departamentos e falo para todos em nome dos que se seguem:

- Agradeço ao meu fiel grupo de trabalho e a quem certamente também devo a conclusão deste curso, meus amigos Eron e Fidel;

- Às minhas companhias no RU e no desesperos acadêmicos, Henzo, Jordan e Lasyla.
- Aos que me acompanham desde o IF e por quem torço todos os dias pelo sucesso, Bruno Mateus e Tiago;
- Ao grande amigo que o IF também me deu e hoje é meu parceiro na vida e no trabalho, Misael;
- Às amizades sinceras e acolhedoras que Deus, em sua bondade, pôs no meu caminho, Huanna, Glícia e Emanuel;
- À minha dupla farias-britense que também nunca deixou de estar comigo, Ian e Jorge;
- E aos meus irmãos de longuíssima data, Ádamo e Pedro Lucas, pois, acumular quinze amigos em dois anos é trivial, no entanto guardar dois amigos por quinze anos é absolutamente raro.

Existem professores que extrapolam a sala de aula e a simples relação docente-discente. Nesse contexto, eu preciso agradecer ao meu professor e orientador, Francisco Almeida, pelo direcionamento e o tempo dedicado a este trabalho, bem como pela solicitude de sempre em outras empreitadas; e ao meu professor de Concreto I, Patrick Gomes, por me introduzir na área das estruturas sempre com muita dedicação e pelas oportunidades que já me deu na prática.

Ao corpo docente do curso de engenharia civil da UFCA, agradeço nos nomes de: Silvana Alcântara, Antônio Carlos, Thiago Bessa, Vicente Helano, Flávio Xavier, Paulo Roberto, Larissa Rocha, Mário Henrique e Luiz Alberto.

Aos demais educadores que fizeram parte da minha formação e que ajudaram a forjar o ser humano que me torno diariamente: Tia Narjara, Tia Egle, Tia Janaína Bacurau, Tia Claudiana, Tia Marilene, Érmeson, Clemilda, Cicinha, Alex Jussileno, Paulo Filho, Rodrigo Lemos e Fabrício Reimes.

Não menos importante, agradeço à Camilly, por ter sido minha âncora nesses anos e por tudo aquilo que já sabemos.

Concluo que infinda é essa lista de pessoas a quem eu devo algum tipo de agradecimento, e é fato que eu não seria capaz de listar todos sem cometer a injustiça de deixar alguém de fora. Por isso, termino deixando a minha gratidão a todos que cruzaram meu caminho e que, de alguma forma, contribuíram para que aquele inventor pudesse agora se tornar um engenheiro — *que continuará inventando*.

“É feliz quem a Deus se confia”

(Salmo Responsorial 1)

## RESUMO

A instabilidade estrutural representa um dos principais modos de colapso em estruturas esbeltas submetidas a cargas de compressão, podendo levar edificações à ruína em tensões muito inferiores aos limites de resistência dos materiais. A flambagem, fenômeno caracterizado pela perda súbita de estabilidade do equilíbrio, é governada pela rigidez geométrica do sistema e constitui um Estado Limite Último segundo a norma brasileira ABNT NBR 6118. Nesse contexto, a determinação precisa da carga crítica de flambagem torna-se fundamental para garantir a segurança das estruturas. Este trabalho apresenta o desenvolvimento e a validação de um programa computacional, denominado PortPlan, voltado para a análise de estabilidade elástica de pórticos planos. A ferramenta foi implementada em linguagem Python sob o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO) e a sua formulação numérica baseou-se no Método da Rigidez Direta (MRD), empregando a superposição das matrizes de rigidez elástica e geométrica para a obtenção da matriz de rigidez tangente. A determinação da carga crítica estrutural foi realizada pelo método da bisseção acoplado à verificação de estabilidade via decomposição de Cholesky, enquanto os modos de flambagem foram extraídos pelo método da iteração inversa. A validação do programa foi conduzida em três etapas progressivas: análise de elementos isolados contra as soluções analíticas clássicas de Euler; avaliação da estabilidade global de pórticos planos sob diferentes condições de vinculação; e o estudo da sensibilidade estrutural frente à variação da inércia das seções transversais. Os resultados comprovaram a alta precisão e eficiência do algoritmo desenvolvido, demonstrando excelente convergência de malha e com desvio relativo máximo de 0,04% quando comparado às simulações realizadas no software comercial SAP2000. Conclui-se que o PortPlan demonstrou ser uma ferramenta robusta e confiável, superando as restrições de código fechado dos softwares comerciais e constituindo um valioso recurso técnico e didático para o ensino e a prática da engenharia de estruturas.

**Palavras-chave:** Estabilidade estrutural. Flambagem. Pórticos planos. Análise matricial. Método da Rigidez Direta. Python.

## ABSTRACT

Structural instability represents one of the main collapse modes in slender structures subjected to compressive loads, potentially leading buildings to failure at stress levels far below the material resistance limits. Buckling, a phenomenon characterized by a sudden loss of equilibrium stability, is governed by the geometric stiffness of the system and constitutes an Ultimate Limit State according to the Brazilian standard ABNT NBR 6118. In this context, the accurate determination of the critical buckling load becomes essential to ensure structural safety. This work presents the development and validation of a computational program, named PortPlan, aimed at the elastic stability analysis of plane frames. The tool was implemented in the Python programming language under the Object-Oriented Programming (OOP) paradigm, and its numerical formulation was based on the Direct Stiffness Method (DSM), employing the superposition of the elastic and geometric stiffness matrices to obtain the tangent stiffness matrix. The determination of the structural critical load was performed using the bisection method coupled with stability verification via Cholesky decomposition, while the buckling modes were extracted using the inverse iteration method. The program validation was conducted in three progressive stages: analysis of isolated elements against Euler's classical analytical solutions; evaluation of the global stability of plane frames under different boundary conditions; and the study of structural sensitivity to variations in the cross-sectional inertia. The results proved the high precision and efficiency of the developed algorithm, which demonstrated excellent mesh convergence and obtained a maximum relative deviation of only 0.04% when compared to simulations performed in the commercial software SAP2000. It is concluded that PortPlan proved to be a robust and reliable tool, overcoming the closed-source restrictions of commercial software and constituting a valuable technical and didactic resource for the teaching and practice of structural engineering.

**Keywords:** Structural stability. Buckling. Plane frames. Matrix analysis. Direct Stiffness Method. Python.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tipos de estabilidade do equilíbrio com a analogia da esfera sobre superfície	20
Figura 2 – Diagrama de Carga x Deslocamento Transversal: Bifurcação Estável Simétrica	21
Figura 3 – Diagrama de Corpo Livre - Coluna de Euler	22
Figura 4 – Modos de flambagem em pórticos: (a) Modo simétrico em estrutura de nós fixos; (b) Modo anti-simétrico em estrutura de nós móveis.	24
Figura 5 – Graus de liberdade locais de um elemento de pórtico plano.	25
Figura 6 – Sistemas de coordenadas local ( $x', y'$ ) e global ( $X, Y$ ) com ângulo de inclinação $\alpha$ .	27
Figura 7 – Graus de liberdade do elemento de pórtico plano.	28
Figura 8 – Sistema A - Graus de liberdade para o elemento biengastado de referência.	30
Figura 9 – Sistema B - Graus de liberdade para elemento com rótula no nó esquerdo.	31
Figura 10 – Sistema C - Graus de liberdade para elemento com rótula no nó direito.	31
Figura 11 – Sistema D - Graus de liberdade para elemento birotulado.	32
Figura 12 – Gráfico do determinante da matriz de rigidez tangente em função do nível de carga $c$ .	34
Figura 13 – Diagrama de classes simplificado do programa de análise estrutural.	36
Figura 14 – Forças nodais equivalentes - vigas EE e ER.	38
Figura 15 – Convenção de sinais clássica da Resistência dos Materiais	41
Figura 16 – Casos de validação para elementos estruturais isolados	46
Figura 17 – Configurações de pórticos para aplicação	47
Figura 18 – Pórticos com variação da direção de maior inércia.	48
Figura 19 – Isométrico - Pórticos com variação da direção de maior inércia.	49
Figura 20 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pilar Engastado-Livre.	52
Figura 21 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pilar Biarticulado.	52
Figura 22 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pilar Engastado-Apoiado.	53
Figura 23 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pilar Biengastado.	53
Figura 24 – Modos de flambagem - Elementos Isolados (pilares).	54
Figura 25 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pórtico Biarticulado.	56
Figura 26 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pórtico Biengastado.	57
Figura 27 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pórtico Misto.	57
Figura 28 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pórtico Triangular.	58

Figura 29 – Modos de flambagem - Pórticos Biarticulado e Biengastado. . . . .	58
Figura 30 – Modos de flambagem - Pórticos Misto e Triangular. . . . .	59
Figura 31 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pórtico com Maiores Inércias. . . . .	62
Figura 32 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pórtico com Menores Inércias. . . . .	62
Figura 33 – Modos de flambagem - Pórticos com variação de inércia. . . . .	63

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Cargas críticas de flambagem - elementos isolados (pilares). . . . .	51
Tabela 2 – Cargas críticas de flambagem - Pórticos planos. . . . .	55
Tabela 3 – Comparativo das cargas críticas de flambagem: PortPlan x SAP2000. . . . .	60
Tabela 4 – Cargas críticas de flambagem - Pórticos com variação de inércia. . . . .	61
Tabela 5 – Comparativo das cargas críticas de flambagem: PortPlan x SAP2000 (Variação de Inércia). . . . .	63

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
MRD	Método da Rigidez Direta
NBR	Norma Brasileira
POO	Programação Orientada a Objetos

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Área da seção transversal
$c$	Fator de carga
$c_{cr}$	Fator de carga crítica
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$I$	Momento de inércia da seção transversal
$L$	Comprimento do elemento de barra
$L_{ef}$	Comprimento efetivo de flambagem
$M$	Momento fletor
$N$	Esforço normal
$V$	Esforço cortante
$N_i$	Função de forma de Hermite do grau de liberdade $i$
$P$	Força axial aplicada
$P_{cr}$	Carga crítica de flambagem
$u$	Deslocamento nodal na direção $x$
$v$	Deslocamento nodal na direção $y$
$x$	Coordenada cartesiana horizontal
$y$	Coordenada cartesiana vertical
$\alpha$	Ângulo de inclinação do elemento em relação ao eixo $x$
Erro	Erro relativo percentual
$\theta$	Rotação nodal
$\lambda$	Autovalor do problema de estabilidade
$\xi$	Coordenada natural adimensional
$\pi$	Constante pi
<b>F</b>	Vetor de forças nodais equivalentes
<b>K<sub>e</sub></b>	Matriz de rigidez elástica do elemento
<b>K<sub>g</sub></b>	Matriz de rigidez geométrica do elemento

<b><math>K_t</math></b>	Matriz de rigidez tangente
<b><math>T</math></b>	Matriz de transformação de coordenadas
<b><math>u</math></b>	Vetor de deslocamentos nodais

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b>	17
2	<b>OBJETIVOS</b>	18
2.1	Objetivo Geral	18
2.2	Objetivos Específicos	18
3	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	18
3.1	<b>Fundamentos da Estabilidade Estrutural</b>	19
3.1.1	<i>Conceitos de Equilíbrio e Estabilidade</i>	19
3.1.2	<i>Carga Crítica e Bifurcação do Equilíbrio</i>	20
3.1.3	<i>A Coluna de Euler</i>	21
3.2	<b>Flambagem em Pórticos Planos</b>	23
3.2.1	<i>Classificação de Pórticos e Modos de Instabilidade</i>	23
3.2.2	<i>Comprimento Efetivo de Flambagem</i>	23
3.3	<b>O Método da Rigidez Direta</b>	25
3.3.1	<i>Discretização e Funções de Interpolação</i>	25
3.3.2	<i>Sistemas de Coordenadas e Matriz de Rotação</i>	26
3.3.3	<i>Matriz de Rigidez Elástica (<math>K_e</math>)</i>	27
3.4	<b>Análise de Estabilidade via Método Matricial</b>	28
3.4.1	<i>Matriz de Rigidez Geométrica (<math>K_g</math>)</i>	28
3.4.2	<i>Matriz de Incidência Cinemática</i>	29
3.4.3	<i>O Problema de Autovalor: Cálculo da Carga Crítica</i>	32
4	<b>METODOLOGIA</b>	34
4.1	<b>Desenvolvimento do Programa de Análise Linear</b>	34
4.1.1	<i>Arquitetura do Programa</i>	35
4.1.2	<i>Formulação Matricial e Montagem da Matriz de Rigidez</i>	36
4.1.3	<i>Montagem do Vetor de Forças Globais</i>	37
4.1.4	<i>Aplicação de Condições de Contorno</i>	39
4.1.5	<i>Resolução do Sistema Linear</i>	39
4.1.6	<i>Cálculo de Esforços Internos e Reações de Apoio</i>	40
4.1.7	<i>Visualização Gráfica dos Resultados</i>	41
4.2	<b>Implementação da Função de Cálculo da Carga Crítica de Flambagem</b>	42

4.2.1	<i>Matriz de Rigidez Geométrica</i> . . . . .	42
4.2.2	<i>Método da Bisseção com Verificação de Estabilidade</i> . . . . .	43
4.2.3	<i>Determinação do Modo de Flambagem</i> . . . . .	44
4.3	<b>Validação do Programa</b> . . . . .	45
4.3.1	<i>Metodologia de Análise e Grupos de Teste</i> . . . . .	45
4.3.2	<i>Grupo I: Elementos Estruturais Isolados</i> . . . . .	46
4.3.3	<i>Grupo II: Pórticos Planos</i> . . . . .	47
4.3.4	<i>Grupo III: Sensibilidade à Orientação da Inércia</i> . . . . .	48
5	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> . . . . .	50
5.1	<b>Resultados do Grupo I: Elementos Estruturais Isolados</b> . . . . .	50
5.2	<b>Resultados do Grupo II: Aplicações em Pórticos Planos</b> . . . . .	55
5.3	<b>Resultados do Grupo III: Sensibilidade à Orientação da Inércia</b> . . . . .	60
6	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	64
6.1	<b>Sugestões para Trabalhos Futuros</b> . . . . .	65
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	66

## 1 INTRODUÇÃO

A análise estrutural constitui etapa fundamental dos projetos de estruturas, consistindo na idealização do comportamento da estrutura em um modelo para obtenção dos esforços, tensões e deslocamentos necessários ao dimensionamento e às verificações em serviço (MARTHA, 2010). Nesse contexto, a estabilidade elástica global representa aspecto crítico da segurança estrutural, particularmente o fenômeno de flambagem em elementos comprimidos.

Segundo Timoshenko e Gere (1961), a flambagem caracteriza-se pela perda súbita de estabilidade do equilíbrio em elementos submetidos à compressão, em que a estrutura assume configuração deformada de modo abrupto. Diferentemente das falhas por esgotamento da resistência do material, a flambagem é governada pela rigidez geométrica do sistema, podendo conduzir a estrutura ao colapso em níveis de tensão muito inferiores aos limites de escoamento dos materiais. A gravidade desse fenômeno é reconhecida pela ABNT NBR 6118 (2023), que classifica a perda de estabilidade global como Estado Limite Último e dedica seção específica às verificações de instabilidade e efeitos de segunda ordem.

A determinação da carga crítica de flambagem, parâmetro que estabelece o limite para ocorrência do fenômeno, pode ser realizada através de formulações analíticas clássicas, obtidas pela solução da equação diferencial da linha elástica (TIMOSHENKO; GERE, 1961). Como alternativa para a análise de estruturas com geometrias variadas, surgem os métodos numéricos matriciais, que empregam funções aproximadas e apresentam adequação à implementação computacional, sendo amplamente utilizados em *softwares* comerciais.

Embora existam programas comerciais consolidados que realizem a análise de instabilidade estrutural, estes são desenvolvidos em código fechado, dificultando a compreensão profunda da teoria aplicada e a identificação de limitações numéricas. O desenvolvimento de ferramentas próprias permite não apenas o domínio completo da formulação teórica, mas também a customização para aplicações específicas, constituindo recurso valioso para o ensino e a prática da engenharia estrutural.

Assim, este trabalho apresenta o desenvolvimento de um programa computacional voltado à análise de instabilidade elástica de pórticos planos, empregando métodos numéricos matriciais para a determinação da carga crítica de flambagem. A formulação fundamenta-se no Método da Rigidez Direta (MRD), técnica que permite a montagem da matriz de rigidez global da estrutura a partir da contribuição individual de cada elemento, possibilitando a resolução sistemática de sistemas de equações que regem o comportamento estrutural.

A implementação baseada no MRD confere ao programa a capacidade de processar diferentes tipologias e arranjos estruturais. Para assegurar a precisão da ferramenta desenvolvida, o trabalho contemplou uma etapa de validação mediante a comparação dos resultados de elementos isolados com soluções analíticas clássicas e de pórticos planos com o *software* comercial SAP2000. O programa foi aplicado ao estudo desses pórticos, visando inferir a estabilidade global dos sistemas frente a variações de vinculação e à sensibilidade da orientação da inércia das seções transversais.

## **2 OBJETIVOS**

### **2.1 Objetivo Geral**

O objetivo deste trabalho consiste em desenvolver e validar um programa de análise de pórticos planos capaz de calcular a carga crítica de flambagem via métodos matriciais.

### **2.2 Objetivos Específicos**

Para alcançar o objetivo geral proposto, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Estruturar e desenvolver um algoritmo de análise de estruturas reticuladas bidimensionais em linguagem Python.
- Incorporar ao programa desenvolvido a função de cálculo da carga crítica de flambagem através de métodos matriciais que envolvam a rigidez geométrica da estrutura.
- Validar o programa desenvolvido com um estudo comparativo dos resultados obtidos pela ferramenta frente às formulações consagradas na literatura para barras isoladas e ao *software* comercial SAP2000 para pórticos, considerando diferentes vinculações e níveis de discretização.

## **3 REFERENCIAL TEÓRICO**

A presente seção estabelece o arcabouço teórico que sustenta o desenvolvimento do trabalho proposto, focando nos princípios da estabilidade estrutural e na formulação matricial para a análise de flambagem em pórticos planos.

### 3.1 Fundamentos da Estabilidade Estrutural

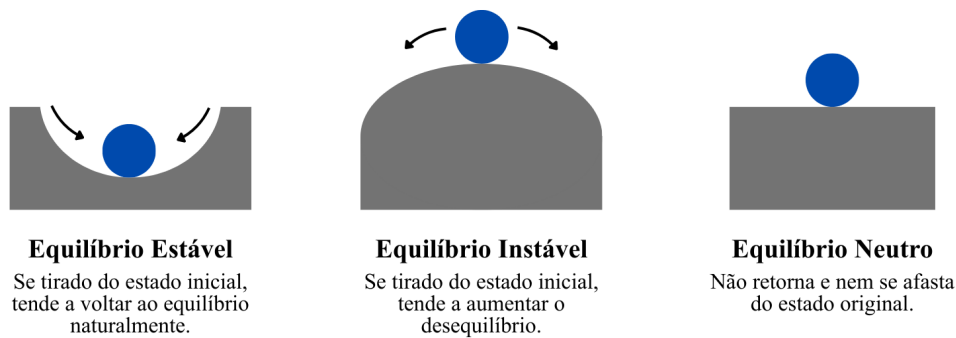
Segundo Timoshenko e Gere (1961), a estabilidade de uma estrutura está fundamentalmente ligada à sua capacidade de manter uma configuração de equilíbrio sob a ação de carregamentos externos. Diferentemente da análise de resistência, que se concentra na tensão admissível do material, a estabilidade trata da geometria e da rigidez do sistema.

#### 3.1.1 Conceitos de Equilíbrio e Estabilidade

O conceito de estabilidade mecânica pode ser ilustrado através da analogia clássica de uma esfera sobre uma superfície, conforme descrito por Chen e Lui (1987) e ilustrado pela Figura 1. O sistema pode apresentar três estados distintos de equilíbrio:

- **Equilíbrio Estável:** Ocorre quando o sistema, ao ser submetido a uma pequena perturbação e ter a ação cessada, tende a retornar à sua configuração original. Na analogia física, esta situação equivale a uma esfera repousando no fundo de uma superfície côncava, onde a gravidade atua como uma força restauradora que traz o corpo de volta ao centro.
- **Equilíbrio Instável:** Ocorre quando, após uma pequena perturbação, o sistema tende a se afastar indefinidamente da posição inicial, não retornando ao estado original. Visualmente, este estado é representado por uma esfera precariamente equilibrada no topo de uma superfície convexa, onde qualquer deslocamento infinitesimal gera forças desequilibrantes que amplificam o movimento.
- **Equilíbrio Neutro:** Caracteriza-se quando o sistema permanece em repouso na nova posição assumida após a perturbação, sem tendência de retorno ou afastamento. Esta condição é análoga a uma esfera apoiada sobre um plano horizontal perfeito e sem atrito, onde não há variação de energia potencial gravitacional independentemente da posição assumida pelo corpo.

Figura 1 – Tipos de estabilidade do equilíbrio com a analogia da esfera sobre superfície



Fonte: Adaptado de Chen e Lui (1987)

Estruturalmente, o interesse reside em garantir que a configuração de projeto seja de equilíbrio estável. A transição de um estado estável para um estado instável, ou neutro, é o cerne do problema de flambagem (TIMOSHENKO; GERE, 1961).

### 3.1.2 Carga Crítica e Bifurcação do Equilíbrio

A transição entre o estado de equilíbrio estável e o instável em elementos estruturais comprimidos ocorre em um nível de carregamento específico, denominado carga crítica ( $P_{cr}$ ). Este parâmetro representa o valor limite da força axial para o qual a configuração reta da barra deixa de ser a única solução de equilíbrio estável (TIMOSHENKO; GERE, 1961).

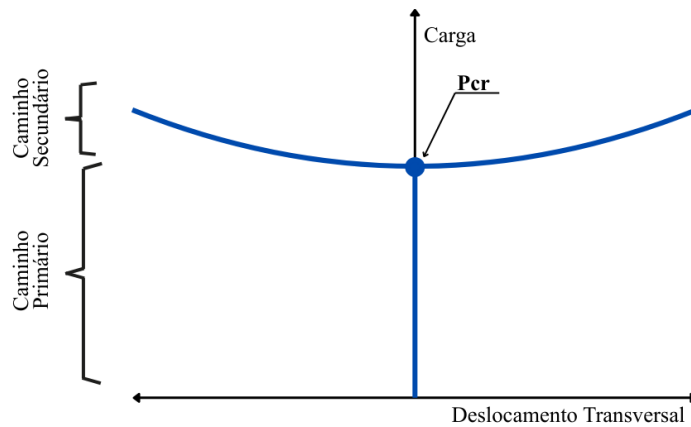
A resposta da estrutura sob compressão é descrita teoricamente através de caminhos de equilíbrio. Para pórticos e colunas ideais, o fenômeno é classificado por Chen e Lui (1987) como Bifurcação Estável Simétrica. Esta classificação fundamenta-se em duas características físicas do sistema:

1. **Simetria:** A estrutura idealizada não apresenta preferência direcional para o modo de falha. A flambagem pode ocorrer em qualquer sentido do eixo transversal com a mesma demanda energética.
2. **Estabilidade pós-crítica:** Diferentemente de estruturas de cascas cilíndricas, que sofrem colapso imediato ao atingir a carga crítica, as estruturas reticuladas teoricamente mantêm a capacidade de sustentar cargas nas vizinhanças do ponto de bifurcação, assumindo uma configuração deformada estável.

O comportamento é ilustrado pelo gráfico de carga por deslocamento transversal na Figura 2. O segmento vertical representa o caminho de equilíbrio primário, onde a estrutura permanece reta. O ponto de interseção define a bifurcação, a partir da qual o sistema tende a seguir os ramos curvilíneos, caminho secundário, caracterizados por grandes deslocamentos

laterais.

Figura 2 – Diagrama de Carga x Deslocamento Transversal: Bifurcação Estável Simétrica



Fonte: Adaptado de Chen e Lui (1987)

Ressalta-se que a bifurcação matemática perfeita é uma idealização. Em estruturas reais, a presença de imperfeições geométricas ou materiais converte a bifurcação brusca em uma divergência progressiva do equilíbrio. Contudo, o valor de  $P_{cr}$  determinado por esta teoria permanece como o parâmetro fundamental para o dimensionamento e verificação de segurança.

### 3.1.3 A Coluna de Euler

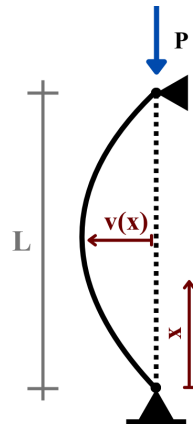
A base analítica para o estudo da flambagem foi estabelecida por Leonhard Euler, que deduziu a carga crítica para uma barra ideal comprimida. O modelo, conhecido como Coluna de Euler, consiste em uma barra reta, de seção transversal constante e material elástico linear, articulada em ambas as extremidades.

A formulação parte da equação diferencial da linha elástica, considerando o equilíbrio da barra na configuração deformada. O momento fletor interno ( $M_{int} = -EIv''$ ) deve equilibrar o momento externo gerado pela força axial devido ao deslocamento lateral ( $M_{ext} = Pv$ ). Obtendo, assim, a Equação 3.1 governante:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} + Pv = 0 \quad (3.1)$$

onde  $v(x)$  é o deslocamento lateral na posição longitudinal  $x$ . Introduzindo o parâmetro  $k^2 = P/EI$ , a equação assume a forma clássica de um oscilador harmônico ( $v'' + k^2v = 0$ ), cuja solução geral é:

Figura 3 – Diagrama de Corpo Livre - Coluna de Euler



Fonte: Autor (2026).

$$v(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad (3.2)$$

As constantes  $A$  e  $B$  são determinadas pelas condições de contorno cinemáticas do modelo biapoado:

1. Em  $x = 0$ ,  $v = 0 \implies B = 0$ .
2. Em  $x = L$ ,  $v = 0 \implies A \sin(kL) = 0$ .

Para que ocorra a flambagem, admite-se que a barra assume uma configuração deformada não nula, o que implica  $A \neq 0$ . Consequentemente, a condição de instabilidade exige que  $\sin(kL) = 0$ . As raízes desta equação transcendental são dadas por  $kL = n\pi$ , onde  $n$  é um número inteiro positivo.

Substituindo  $k = \sqrt{P/EI}$  e isolando a carga  $P$ , obtém-se a família de cargas críticas:

$$P_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (3.3)$$

O menor valor de carga, correspondente ao primeiro modo de flambagem ( $n = 1$ ), é a carga crítica fundamental, ou **Carga de Euler**:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (3.4)$$

A Equação 3.4 demonstra que a estabilidade é governada pela rigidez à flexão ( $EI$ ) e pelo comprimento ( $L$ ), confirmando que a flambagem elástica é um fenômeno de instabilidade geométrica, independente da tensão de escoamento do material.

## 3.2 Flambagem em Pórticos Planos

A transposição dos conceitos da coluna isolada para pórticos exige a compreensão de como os elementos interagem entre si. Em estruturas reticuladas, a rigidez de uma barra não é isolada; ela depende diretamente da rigidez à flexão das vigas e pilares conectados aos seus nós. Essa interação define o comportamento global do sistema e o seu modo crítico de instabilidade.

### 3.2.1 *Classificação de Pórticos e Modos de Instabilidade*

A perda de estabilidade em pórticos planos é governada fundamentalmente pela capacidade da estrutura em desenvolver deslocamentos horizontais, ou seja, pela liberdade de translação dos seus nós. Segundo Gere e Jr. (1981), a análise deve distinguir entre dois mecanismos primários de falha, ilustrados na Figura 4.

O primeiro mecanismo, denominado modo de instabilidade local, é característico de estruturas onde os nós são impedidos de sofrer deslocamentos horizontais significativos por meio de algum sistema de contraventamento. Tais estruturas são classificadas como de nós fixos. Conforme explicam Timoshenko e Gere (1961), a flambagem ocorre predominantemente pela deformação dos elementos entre seus nós extremos, assemelhando-se ao comportamento da Coluna de Euler, o que resulta em cargas críticas elevadas.

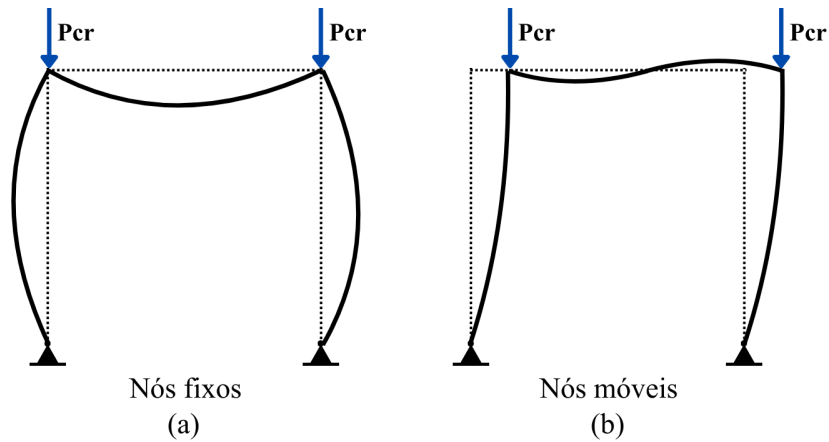
O segundo mecanismo, denominado modo de instabilidade global, é típico de estruturas que permitem a translação lateral livre, denominadas estruturas de nós móveis. Nesse cenário, a flambagem envolve o deslocamento lateral conjunto de todo o andar ou da estrutura. Gere e Jr. (1981) destacam que essa translação lateral introduz momentos fletores adicionais de segunda ordem, conhecidos como efeito P-Delta, que degradam a rigidez global e resultam em cargas críticas drasticamente inferiores às observadas no modo local.

Portanto, em estruturas desprovidas de sistemas rígidos de contraventamento, a consideração da deslocabilidade nodal torna-se mandatória, visto que a instabilidade global tende a preceder a instabilidade local.

### 3.2.2 *Comprimento Efetivo de Flambagem*

Para estender a aplicação da teoria clássica de Euler ao dimensionamento de pórticos, a engenharia estrutural utiliza o conceito de Comprimento Efetivo. Este método permite isolar um elemento comprimido da estrutura global, ajustando matematicamente seu comprimento real

Figura 4 – Modos de flambagem em pórticos: (a) Modo simétrico em estrutura de nós fixos; (b) Modo anti-simétrico em estrutura de nós móveis.



Fonte: Adaptado de Timoshenko e Gere (1961)

para representar as condições de contorno impostas pelas barras adjacentes (CHEN; LUI, 1987).

A adaptação é realizada através da introdução do fator de comprimento efetivo,  $K$ , na fórmula da carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (3.5)$$

Fisicamente, o produto  $L_{ef} = KL$  corresponde à distância entre os pontos de inflexão da elástica deformada da barra. O valor de  $K$  quantifica a influência das restrições rotacionais e translacionais. Em estruturas de nós fixos, a restrição rotacional nas extremidades reduz o comprimento efetivo, aproximando o comportamento da barra ao de uma coluna biengastada. Nesses casos, o fator varia no intervalo  $0,5 \leq K \leq 1,0$ . Por outro lado, em estruturas de nós móveis, a translação lateral impede a formação de pontos de inflexão dentro do vão da barra, projetando a elástica para fora do elemento. Isso resulta em um comprimento efetivo maior que o real, com  $K > 1,0$ , podendo assumir valores elevados dependendo da flexibilidade lateral do pórtico.

No entanto, Chen e Lui (1987) destacam que a abordagem analítica para determinação da carga crítica possui limitações importantes para estruturas complexas. O método baseia-se em hipóteses idealizadas, pressupondo que todos os pilares de um andar flambam simultaneamente sob a mesma carga crítica e que a estrutura possui geometria regular. Tais premissas frequentemente não se verificam em pórticos reais com carregamentos assimétricos ou variações bruscas de rigidez. Diante dessas incertezas, a análise matricial apresenta-se como

uma alternativa superior, pois avalia a estabilidade global do sistema sem depender da estimativa manual de comprimentos efetivos isolados.

### 3.3 O Método da Rigidez Direta

Para a análise de estruturas reticuladas complexas, em que as soluções analíticas fechadas se tornam inviáveis, a engenharia recorre a métodos numéricos. Dentre estes, o Método da Rigidez Direta consolidou-se como a ferramenta padrão para a análise computacional.

Segundo Martha (2010), este método fundamenta-se na sistematização do equilíbrio de nós e na compatibilidade de deslocamentos, permitindo transformar o problema contínuo de equações diferenciais em um sistema discreto de equações algébricas lineares, expresso pela lei de Hooke dada pela Equação 3.6:

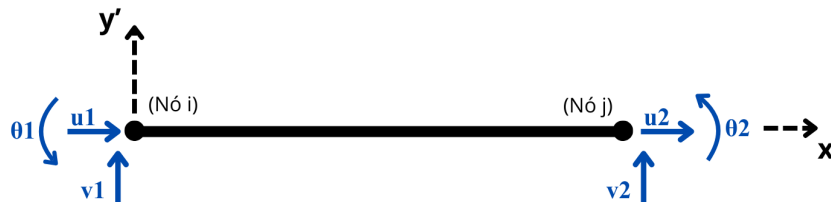
$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças nodais,  $\mathbf{u}$  o vetor de deslocamentos nodais e  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez global da estrutura.

#### 3.3.1 Discretização e Funções de Interpolação

O primeiro passo da análise consiste na discretização, processo pelo qual a estrutura contínua é modelada como um conjunto de elementos finitos interconectados por nós. Para um pórtico plano, cada nó possui três graus de liberdade: dois deslocamentos translacionais ( $u, v$ ) e uma rotação ( $\theta$ ), conforme ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – Graus de liberdade locais de um elemento de pórtico plano.



Fonte: Autor (2025).

Para descrever o comportamento do elemento entre os nós, o método utiliza funções de interpolação, conhecidas também como funções de forma, que aproximam o campo de

deslocamentos contínuo a partir dos valores discretos nodais. Conforme detalhado por Almeida (1985), adotam-se polinômios distintos para os comportamentos axial e flexural:

- **Comportamento Axial ( $u$ ):** A deformação longitudinal é aproximada por funções lineares, Polinômios de Lagrange, visto que a força axial é considerada constante ao longo do elemento na formulação clássica:

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \left(\frac{x}{L}\right) u_2 \quad (3.7)$$

- **Comportamento à Flexão ( $v$ ):** A deformada transversal exige continuidade de deslocamento e de rotação. Para tal, utilizam-se os Polinômios Hermitianos de terceiro grau. Assim, o campo de deslocamentos transversais  $v(x)$  é dado por:

$$v(x) = H_1(x)v_1 + H_2(x)\theta_1 + H_3(x)v_2 + H_4(x)\theta_2 \quad (3.8)$$

onde as funções de forma  $H_i(x)$  são:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ H_2(x) &= x \left[ 1 - 2\left(\frac{x}{L}\right) + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \\ H_3(x) &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ H_4(x) &= x \left[ -\left(\frac{x}{L}\right) + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.3.2 *Sistemas de Coordenadas e Matriz de Rotação*

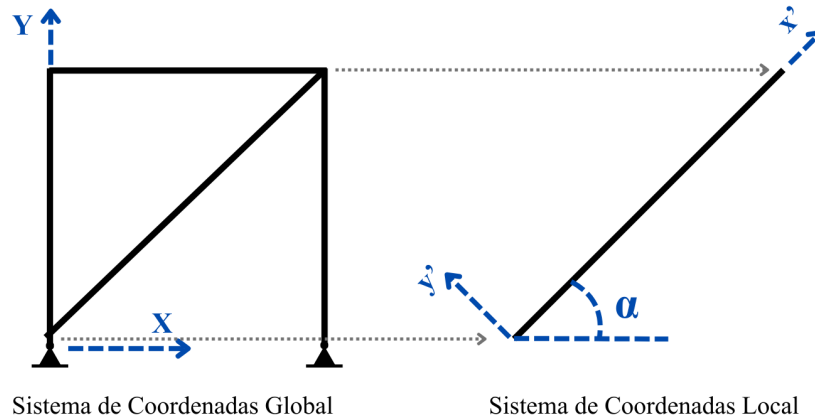
A generalidade do método matricial reside na sua capacidade de analisar estruturas com geometria arbitrária. Para tanto, é necessário distinguir dois referenciais espaciais (Figura 6):

- **Sistema Local ( $x', y'$ ):** Solidário ao elemento, com o eixo  $x'$  coincidindo com o eixo longitudinal da barra. As relações constitutivas de rigidez são formuladas neste sistema.
- **Sistema Global ( $X, Y$ ):** Fixo e comum a toda a estrutura, permitindo a soma das contribuições de rigidez de todos os elementos para a montagem da matriz global.

A compatibilização entre esses sistemas é realizada através da Matriz de Rotação (**T**). Esta matriz ortogonal contém os cossenos diretores que relacionam os deslocamentos no sistema global (**u**) com os do sistema local (**u'**) através da relação  $\mathbf{u}' = \mathbf{T}\mathbf{u}$ .

Considerando  $c = \cos \alpha$  e  $s = \sin \alpha$ , onde  $\alpha$  é o ângulo do eixo da barra em relação ao eixo global  $X$ , a matriz de rotação para um elemento de pórtico plano, com 6 graus de liberdade, é expressa explicitamente por:

Figura 6 – Sistemas de coordenadas local ( $x',y'$ ) e global ( $X,Y$ ) com ângulo de inclinação  $\alpha$ .



Fonte: Autor (2026).

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

A matriz de rigidez do elemento referida ao sistema global ( $\mathbf{K}$ ) é obtida através da transformação congruente:

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K}' \cdot \mathbf{T} \quad (3.11)$$

### 3.3.3 Matriz de Rigidez Elástica ( $\mathbf{K}_e$ )

A matriz de rigidez elástica ( $\mathbf{K}_e$ ), ou matriz de rigidez local ( $\mathbf{K}'$ ), encapsula as propriedades de rigidez do elemento aos esforços solicitantes no regime linear elástico.

Para um elemento de pórtico plano, a matriz combina a rigidez axial da barra com a rigidez à flexão da viga, assumindo a forma da matriz simétrica 6x6 apresentada na equação 3.12 (PRZEMIENIECKI, 1968).

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material,  $A$  a área da seção transversal,  $I$  o momento de inércia da seção transversal e  $L$  o comprimento do elemento.

### 3.4 Análise de Estabilidade via Método Matricial

Enquanto a análise linear apresentada na seção anterior pressupõe que as equações de equilíbrio sejam formuladas na configuração indeformada da estrutura, a análise de estabilidade exige, por definição, a consideração da geometria deformada. Para capturar esse comportamento em uma formulação matricial, torna-se necessário estender o método da rigidez direta através da introdução da Rigidez Geométrica.

#### 3.4.1 Matriz de Rigidez Geométrica ( $\mathbf{K}_g$ )

A sistematização do efeito de segunda ordem para elementos de pórtico plano é realizada através da Matriz de Rigidez Geométrica ( $\mathbf{K}_g$ ), também denominada na literatura como Matriz de Estabilidade ou Matriz de Tensões Iniciais.

Diferentemente das formulações simplificadas que consideram apenas o trabalho realizado pela força axial constante, a análise de pórticos planos exige uma abordagem que capture a interação entre os esforços internos iniciais e a configuração deformada do elemento. Para tal, adota-se a formulação proposta por Almeida (1985), que considera o estado de tensões completo da barra para a composição da rigidez geométrica.



Figura 7 – Graus de liberdade do elemento de pórtico plano.

Considerando os graus de liberdade ilustrados na Figura 7 ( $u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2$ ), a matriz  $\mathbf{K}_g$  consistente de ordem 6x6 é expressa por:

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{L^2}P_{N3} & 0 & 0 & -\frac{2}{L^2}P_{N3} & 0 \\ \frac{2}{L^2}P_{N3} & \frac{6}{5L}P_{N1} & \frac{1}{10}P_{N1} & -\frac{2}{L^2}P_{N3} & -\frac{6}{5L}P_{N1} & \frac{1}{10}P_{N1} \\ 0 & \frac{1}{10}P_{N1} & \frac{2L}{15}P_{N1} & 0 & -\frac{1}{10}P_{N1} & -\frac{L}{30}P_{N1} \\ 0 & -\frac{2}{L^2}P_{N3} & 0 & 0 & \frac{2}{L^2}P_{N3} & 0 \\ -\frac{2}{L^2}P_{N3} & -\frac{6}{5L}P_{N1} & -\frac{1}{10}P_{N1} & \frac{2}{L^2}P_{N3} & \frac{6}{5L}P_{N1} & -\frac{1}{10}P_{N1} \\ 0 & \frac{1}{10}P_{N1} & -\frac{L}{30}P_{N1} & 0 & -\frac{1}{10}P_{N1} & \frac{2L}{15}P_{N1} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

onde  $L$  representa o comprimento do elemento. Os parâmetros  $P_{N1}$  e  $P_{N3}$  quantificam a influência dos esforços axiais e dos momentos fletores na rigidez do sistema, sendo calculados a partir dos esforços internos iniciais obtidos na análise de primeira ordem:

$$P_{N1} = \frac{1}{2}(N_2 - N_1) \quad (3.14)$$

$$P_{N3} = \frac{1}{2}(M_2 + M_1) \quad (3.15)$$

Nestas expressões,  $N_1$  e  $N_2$  são as forças axiais nas extremidades inicial e final (adotando-se tração como positiva para que a compressão reduza a rigidez global), enquanto  $M_1$  e  $M_2$  são os momentos fletores nodais associados às rotações  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , respectivamente.

### 3.4.2 Matriz de Incidência Cinemática

Na modelagem de pórticos planos pelo Método da Rigidez Direta, os elementos de barra são convencionalmente formulados com nós rigidamente conectados. Como estruturas reais frequentemente apresentam liberações de momento fletor nas extremidades, torna-se necessário adaptar o modelo numérico.

Para contornar a dedução de novas matrizes de rigidez para cada tipologia de ligação, utiliza-se o conceito de matriz de incidência cinemática. A fundamentação matemática para essa operação baseia-se no Princípio da Contragradência (GERE; JR., 1981), o qual estabelece

que, em sistemas de coordenadas distintos, a matriz de transformação de esforços estáticos corresponde à matriz transposta da transformação de deslocamentos.

Considerando uma matriz de rigidez local  $[K]_A$  de um elemento biengastado de referência (Sistema A), a matriz de rigidez modificada por rótulas para um novo sistema (por exemplo, Sistema B), definida como  $[K]_B$ , é obtida pela seguinte transformação matricial de congruência:

$$[K]_B = [A]_{BA}^T [K]_A [A]_{BA} \quad (3.16)$$

onde  $[A]_{BA}$  representa a matriz de incidência cinemática que relaciona os deslocamentos nodais do sistema modificado (Sistema B) com os do sistema de referência (Sistema A). As matrizes de transformação para a introdução de rótulas em pórticos planos detalhadas a seguir baseiam-se nas formulações consolidadas por Gere e Jr. (1981).

A seguir, detalham-se os sistemas de coordenadas e as respectivas matrizes de transformação para o elemento de referência e para as três condições clássicas de liberação de flexão, considerando uma barra de comprimento  $L$ .

#### *Sistema A: Elemento Biengastado*

O Sistema A corresponde ao elemento padrão com engastes perfeitos em ambas as extremidades. Ele possui seis graus de liberdade locais, sendo três em cada nó, conforme ilustrado na Figura 8.

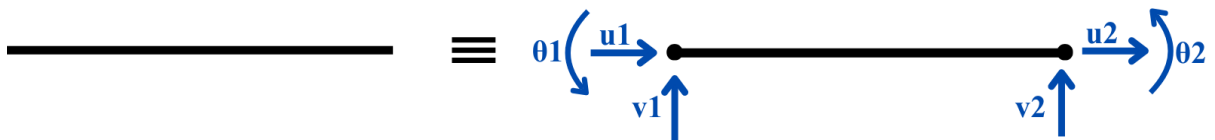


Figura 8 – Sistema A - Graus de liberdade para o elemento biengastado de referência.

#### *Sistema B: Elemento com Rótula no Nó Inicial*

Quando a liberação de momento fletor ocorre apenas na extremidade inicial (nó esquerdo) da barra, adota-se o Sistema B. A configuração dos graus de liberdade para esta condição é ilustrada na Figura 9.

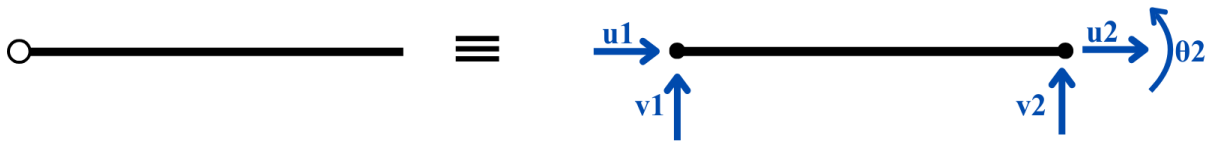


Figura 9 – Sistema B - Graus de liberdade para elemento com rótula no nó esquerdo.

A matriz de incidência cinemática  $[A]_{BA}$ , que transforma o Sistema B para o Sistema A, é expressa por:

$$[A]_{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2L} & 0 & 0 & \frac{3}{2L} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

*Sistema C: Elemento com Rótula no Nó Final*

Para um elemento com restrição à rotação liberada apenas na extremidade final (nó direito), utiliza-se o Sistema C. Seus graus de liberdade assumem a configuração da Figura 10.

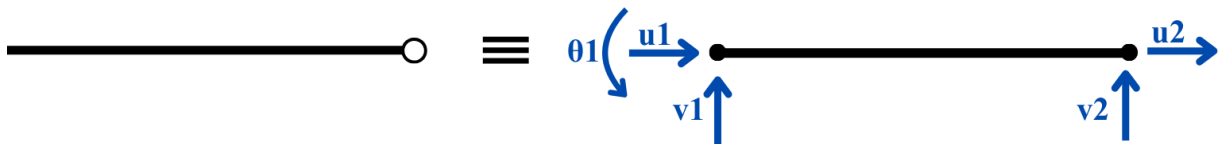


Figura 10 – Sistema C - Graus de liberdade para elemento com rótula no nó direito.

A matriz de transformação  $[A]_{CA}$  correspondente assume a forma:

$$[A]_{CA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2L} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2L} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

### Sistema D: Elemento Birotulado

Em barras que não transmitem momentos fletores em nenhuma das extremidades, adota-se o Sistema D, ilustrado na Figura 11.



Figura 11 – Sistema D - Graus de liberdade para elemento birotulado.

Aplica-se então a seguinte matriz de transformação  $[A]_{DA}$ :

$$[A]_{DA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Ressalta-se que estas matrizes de transformação são válidas para o regime linear e as condições de rótula de flexão aqui apresentadas. O uso destas matrizes em análises não lineares de instabilidade deve ser subordinado a uma verificação rigorosa do problema.

#### 3.4.3 O Problema de Autovalor: Cálculo da Carga Crítica

A condição de instabilidade em um sistema discreto ocorre quando a rigidez tangente total da estrutura torna-se nula, impossibilitando a manutenção do equilíbrio estável sob um incremento de carga infinitesimal. A rigidez total ( $\mathbf{K}_t$ ) é composta pela superposição da rigidez elástica e da rigidez geométrica:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g \quad (3.20)$$

(Considerando a convenção de soma, na qual os termos da matriz  $\mathbf{K}_g$  assumem valores negativos quando gerados por forças axiais de compressão, refletindo a perda de rigidez do sistema).

O equilíbrio do sistema é governado pela equação  $\mathbf{K}_t \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F}$ . No ponto de bifurcação, o sistema admite uma mudança de configuração ( $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ) mesmo na ausência de variação nas forças externas ( $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ). Isso conduz ao sistema homogêneo:

$$(\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

Conforme demonstrado por Almeida (1985), a matriz de rigidez geométrica é proporcional à magnitude do carregamento aplicado, representando fisicamente a redução da rigidez da estrutura causada por forças axiais de compressão. Este conceito é fundamental para a compreensão do fenômeno de flambagem, em que o aumento progressivo da carga compressiva consome a rigidez elástica até que a rigidez total se anule, caracterizando o ponto de instabilidade.

É possível expressar a matriz de rigidez geométrica como  $\mathbf{K}_g = c \cdot \mathbf{K}_g^{ref}$ , onde  $\mathbf{K}_g^{ref}$  é a matriz geométrica calculada para um carregamento de referência e  $c$  é o fator de carga. Assim, a equação assume a forma clássica de um Problema Generalizado de Autovalores:

$$(\mathbf{K}_e + c \cdot \mathbf{K}_g^{ref}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

Para que exista uma solução não trivial ( $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ), o determinante da matriz de coeficientes deve ser nulo:

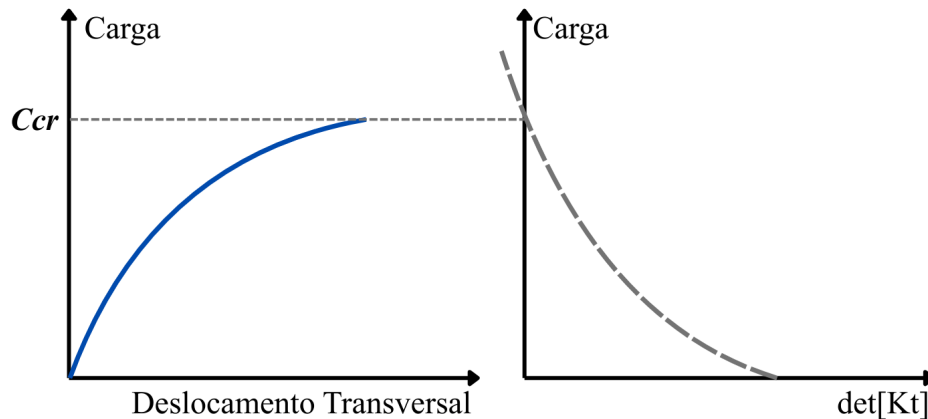
$$\det |\mathbf{K}_e + c \cdot \mathbf{K}_g^{ref}| = 0 \quad (3.23)$$

A solução desta equação característica fornece os autovalores  $c$ . Graficamente, isso corresponde ao ponto onde a curva do determinante da matriz de rigidez cruza o eixo vertical, conforme ilustrado na Figura 12.

O menor autovalor positivo ( $c_{cr}$ ) capaz de resolver o problema generalizado de autovalores é referido como fator de carga crítica, e pode ser interpretado também como um fator de segurança à flambagem. A carga crítica real do sistema é então obtida multiplicando-se as cargas de referência por este fator:

$$\mathbf{P}_{cr} = c_{cr} \cdot \mathbf{P}_{ref} \quad (3.24)$$

Figura 12 – Gráfico do determinante da matriz de rigidez tangente em função do nível de carga  $c$ .



Fonte: Adaptado de Almeida (1985)

onde  $\mathbf{P}_{ref}$  é o vetor de carregamento de referência aplicado na estrutura e  $c_{cr}$  é o fator de carga crítica determinado pela solução do problema de autovalor.

#### 4 METODOLOGIA

O presente trabalho foi estruturado em três etapas principais. A primeira fase consistiu na elaboração do programa de análise linear de pórticos planos, fundamentado no Método da Rigidez Direta (MRD), para a obtenção de deslocamentos nodais, esforços internos e reações de apoio. A segunda etapa abrangeu a implementação da rotina de cálculo da carga crítica de flambagem, integrando a matriz de rigidez geométrica e a resolução do problema de autovalores. Por fim, a terceira fase compreendeu a validação da ferramenta computacional através de estudos comparativos com soluções analíticas clássicas para elementos isolados e com a análise de estabilidade do software comercial SAP2000 para pórticos planos.

##### 4.1 Desenvolvimento do Programa de Análise Linear

O desenvolvimento da ferramenta computacional para análise linear de pórticos planos foi estruturado com base no MRD, amplamente consolidado na literatura de análise estrutural. A implementação foi realizada em linguagem Python, versão 3.13.9, devido à sua sintaxe clara, extensa disponibilidade de bibliotecas científicas e facilidade de manutenção do código. As bibliotecas utilizadas incluem NumPy para operações matriciais e álgebra linear, SciPy para resolução de sistemas lineares e decomposição de matrizes.

#### 4.1.1 *Arquitetura do Programa*

A arquitetura do programa é estruturada seguindo o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO), permitindo modularidade, reutilização de código e representação intuitiva dos elementos estruturais. Foram definidas cinco classes principais: Material, Secao, No, Elemento e Estrutura. Cada classe encapsula as propriedades e comportamentos específicos de sua respectiva entidade estrutural.

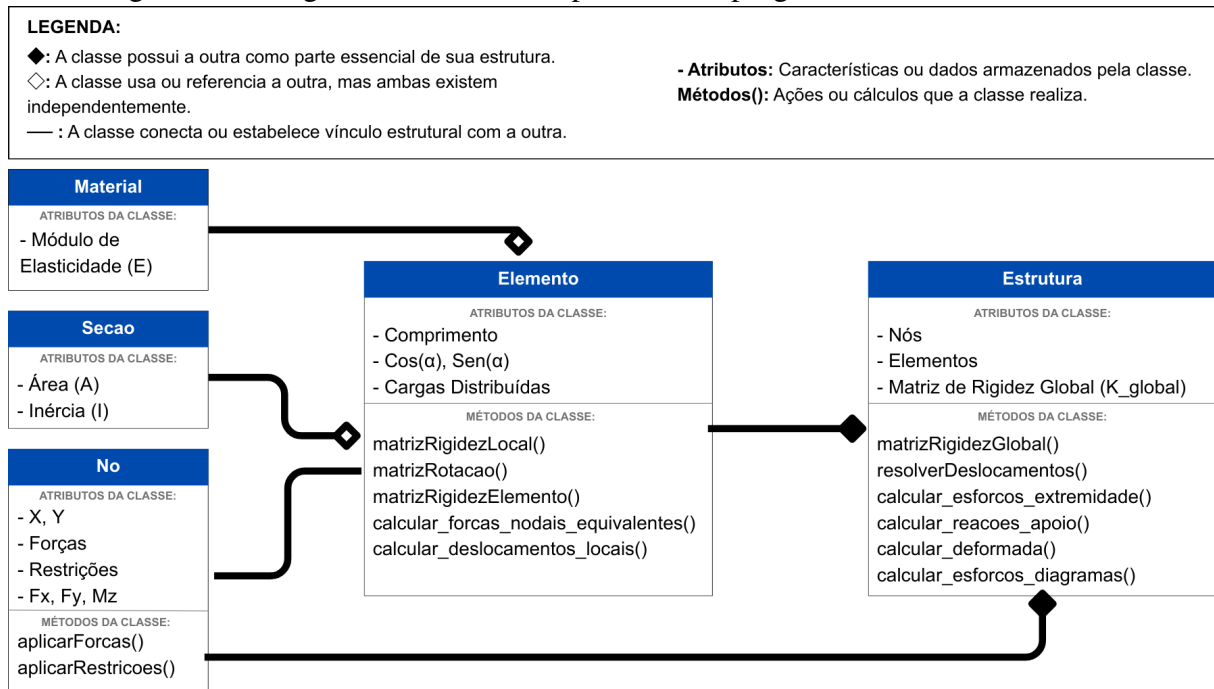
A classe Material armazena as propriedades constitutivas do material, especialmente o módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ). A classe Secao define as propriedades geométricas da seção transversal, especificamente a área ( $A$ ) e o momento de inércia ( $I$ ). A classe No representa os pontos nodais da estrutura, armazenando suas coordenadas cartesianas ( $x, y$ ), os graus de liberdade associados, as forças aplicadas e as condições de contorno, ou seja, restrições de deslocamento.

A classe Elemento modela as barras do pórtico, contendo referências aos nós inicial e final, ao material e à seção transversal. Cada elemento calcula automaticamente seu comprimento ( $L$ ), os cossenos diretores ( $\cos \alpha$  e  $\sin \alpha$ ) e armazena informações sobre cargas distribuídas aplicadas. Adicionalmente, a classe permite a especificação de condições de vinculação nas extremidades através do atributo condicao, que aceita os valores “EE” (engastado-engastado), “ER” (engastado-rotulado), “RE” (rotulado-engastado) ou “RR” (rotulado-rotulado).

A classe Estrutura representa o sistema global, agregando listas de nós e elementos. Esta classe é responsável pela montagem das matrizes globais, aplicação das condições de contorno, resolução do sistema de equações e cálculo dos esforços internos e reações de apoio.

A Figura 13 apresenta o diagrama de classes simplificado do programa, evidenciando as relações de composição entre as entidades estruturais.

Figura 13 – Diagrama de classes simplificado do programa de análise estrutural.



Fonte: Autor (2026).

#### 4.1.2 *Formulação Matricial e Montagem da Matriz de Rigidez*

A formulação matricial implementada segue a abordagem clássica do Método da Rigidez Direta, conforme descrito por Przemieniecki (1968) e Martha (2010). Para cada elemento de pórtico plano, as matrizes de rigidez elástica local e geométrica local são construídas considerando os comportamentos axial e flexional.

A matriz de rigidez local para um elemento com ambas as extremidades engastadas (Sistema A) é obtida conforme apresentado na Equação 3.12, que combina a rigidez axial da barra com a rigidez à flexão da viga.

Para elementos com rótulas em uma ou ambas as extremidades, a matriz de rigidez local é adaptada através do uso das matrizes de incidência cinemática, fundamentadas no Princípio da Contragradência, conforme detalhado na Seção 3.4.2 do Referencial Teórico. Por meio de operações de transformação matricial de congruência, a rigidez elástica e geométrica do elemento padrão biengastado é convertida numericamente para as condições com liberação de momento fletor no nó inicial (Sistema B), no nó final (Sistema C) ou em ambos os nós (Sistema D). Essa abordagem algorítmica permite que o programa calcule a rigidez de qualquer tipologia de barra a partir de uma única matriz base, otimizando o processamento computacional.

A transformação da matriz de rigidez local para o sistema de coordenadas global

é realizada através da matriz de rotação, conforme apresentado na Equação 3.10. A matriz de rigidez do elemento no sistema global ( $\mathbf{K}_e^{\text{global}}$ ) é obtida através da transformação congruente dada na Equação 4.1.

$$\mathbf{K}_e^{\text{global}} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K}_e^{\text{local}} \cdot \mathbf{T} \quad (4.1)$$

A montagem da matriz de rigidez global da estrutura ( $\mathbf{K}_{\text{estrutura}}^{\text{global}}$ ) é realizada através do processo de superposição direta, somando as contribuições de cada elemento nos graus de liberdade correspondentes. O algoritmo implementado percorre todos os elementos da estrutura, identifica os índices globais dos graus de liberdade associados aos nós inicial e final de cada elemento e acumula os termos da matriz de rigidez do elemento na matriz global.

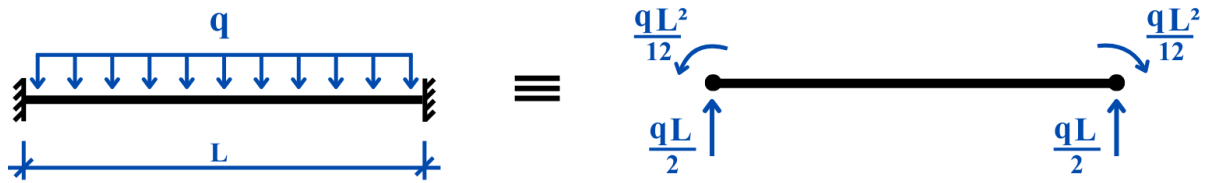
#### **4.1.3 Montagem do Vetor de Forças Globais**

O vetor de forças globais da estrutura é construído através da superposição de duas parcelas distintas: as forças concentradas aplicadas diretamente nos nós e as forças nodais equivalentes provenientes de cargas distribuídas ao longo dos elementos.

Para as forças concentradas, o programa permite a entrada de forças horizontais, verticais e momentos aplicados em qualquer nó da estrutura. Estes valores são inseridos diretamente nas posições correspondentes do vetor de forças global, respeitando a numeração dos graus de liberdade de cada nó.

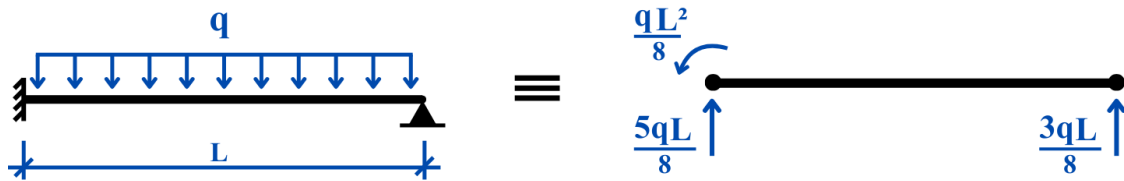
As cargas distribuídas aplicadas sobre os elementos são convertidas em forças nodais equivalentes através do método das forças de engastamento perfeito. Para uma carga uniformemente distribuída de intensidade  $q$  aplicada ao longo do comprimento  $L$  de um elemento, as forças nodais equivalentes dependem das condições de vinculação do elemento. As Equações 4.2 apresentam os vetores de forças nodais equivalentes para elementos engastado-engastado (EE) e engastado-rotulado (ER) submetidos a uma carga transversal uniformemente distribuída  $q$  no sistema local, tal qual ilustra a Figura 14:

Figura 14 – Forças nodais equivalentes - vigas EE e ER.



Esforços - Barra engastada-engastada (EE)

(a)



Esforços - Barra engastada-rotulada (ER)

(b)

Fonte: Autor (2026).

$$\mathbf{F}_{\text{eq,EE}}^{\text{local}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_{\text{eq,ER}}^{\text{local}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5qL}{8} \\ \frac{qL^2}{8} \\ 0 \\ \frac{3qL}{8} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

O programa permite a entrada de cargas distribuídas tanto no sistema de coordenadas local do elemento quanto no sistema global. Quando a carga é especificada no sistema global, suas componentes são automaticamente decompostas no sistema local através das relações trigonométricas. As forças nodais equivalentes calculadas no sistema local são então transformadas para o sistema global através da matriz de rotação e somadas ao vetor de forças globais da estrutura, resultando no vetor de forças combinadas que é utilizado na resolução do sistema linear.

#### 4.1.4 Aplicação de Condições de Contorno

A aplicação das condições de contorno foi implementada através de uma abordagem fundamentada no método da penalidade (COOK *et al.*, 2001). Este método consiste em atribuir um valor de rigidez extremamente elevado, como  $10^{10}$ , aos graus de liberdade restritos, simulando numericamente uma restrição infinita sem alterar a ordem do sistema de equações originais.

Para cada nó da estrutura, o programa verifica o vetor de restrições, composto por valores binários (0 para grau de liberdade livre e 1 para grau de liberdade restrito) nas três direções: deslocamento horizontal, deslocamento vertical e rotação. Quando um grau de liberdade é identificado como restrito, a linha e a coluna correspondentes na matriz de rigidez global são zeradas, e o termo da diagonal principal recebe o valor de penalidade. Este procedimento permite que a matriz global armazene as condições de vínculo de forma isolada, facilitando o pós-processamento e o cálculo de reações de apoio.

#### 4.1.5 Resolução do Sistema Linear

O sistema de equações lineares para a análise estrutural é expresso pela relação fundamental do Método da Rigidez:

$$\mathbf{K}_{\text{global}} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos nodais desconhecidos e  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças nodais aplicadas.

A resolução do sistema foi implementada utilizando a decomposição de Cholesky, método numericamente eficiente para matrizes simétricas e positivas definidas. Este método foi particularmente adequado para análise estrutural pois, além de sua eficiência computacional, funcionou como um verificador automático da estabilidade do sistema estrutural. A decomposição de Cholesky só é possível quando a matriz de rigidez é simétrica e positiva definida, condições que são satisfeitas apenas por estruturas isostáticas ou hiperestáticas adequadamente vinculadas. Caso a decomposição falhe, isso indica que a estrutura é hipostática ou mal condicionada, impedindo a resolução de sistemas fisicamente inválidos.

A biblioteca SciPy fornece a função que realiza a fatoração  $\mathbf{K} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T$ , onde  $\mathbf{L}$  é uma matriz triangular inferior. O sistema é resolvido em duas etapas:

$$\begin{cases} \mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{F} \\ \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{u} = \mathbf{y} \end{cases} \quad (4.4)$$

O vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}$  obtido contém os deslocamentos horizontais, verticais e rotações de todos os nós da estrutura, permitindo a análise da deformada elástica e o cálculo subsequente dos esforços internos.

#### 4.1.6 Cálculo de Esforços Internos e Reações de Apoio

Os esforços internos nas extremidades de cada elemento (força normal  $N$ , força cortante  $V$  e momento fletor  $M$ ) são calculados a partir dos deslocamentos nodais através da relação constitutiva:

$$\mathbf{f}^{\text{local}} = \mathbf{K}_e^{\text{local}} \cdot \mathbf{u}_e^{\text{local}} \quad (4.5)$$

onde  $\mathbf{u}_e^{\text{local}}$  é o vetor de deslocamentos do elemento no sistema de coordenadas local, obtido através da transformação  $\mathbf{u}_e^{\text{local}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_e^{\text{global}}$ .

Para elementos com cargas distribuídas, os esforços totais nas extremidades são obtidos pela superposição dos esforços devidos aos deslocamentos nodais com os esforços de engastamento perfeito:

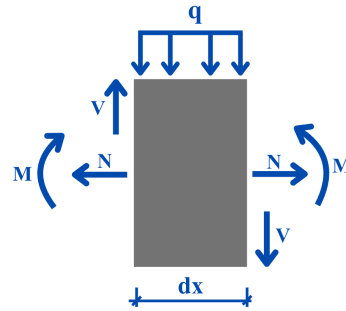
$$\mathbf{f}_{\text{total}}^{\text{local}} = \mathbf{K}_e^{\text{local}} \cdot \mathbf{u}_e^{\text{local}} - \mathbf{F}_{\text{eq}}^{\text{local}} \quad (4.6)$$

Os esforços calculados são ajustados para a convenção de sinais da Resistência dos Materiais, em que a força normal é positiva na tração, a força cortante é positiva quando tende a "gitar" o elemento no sentido horário e o momento fletor é positivo quando traciona as fibras inferiores, conforme a Figura 15.

As reações de apoio nos graus de liberdade restritos são calculadas através da matriz global modificada pelo método da penalidade:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}_{\text{global}} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{F} \quad (4.7)$$

Figura 15 – Convenção de sinais clássica da Resistência dos Materiais



Fonte: Autor (2026).

onde  $\mathbf{R}$  é o vetor de reações. Os valores significativos deste vetor correspondem às reações nos vínculos, enquanto os valores nos graus de liberdade livres resultam numericamente nulos.

#### 4.1.7 Visualização Gráfica dos Resultados

Para facilitar a análise e interpretação dos resultados, foi desenvolvida uma interface gráfica utilizando a biblioteca Tkinter do Python. Esta interface permite a visualização da geometria da estrutura, da configuração deformada, dos diagramas de esforços internos e das reações de apoio.

A deformada elástica de cada elemento é calculada através da interpolação dos deslocamentos nodais utilizando as funções de forma de Hermite, conforme apresentado na Equação 3.9 do Referencial Teórico. O deslocamento axial ao longo do elemento é interpolado linearmente entre os valores nodais, enquanto o deslocamento transversal é interpolado através dos polinômios cúbicos de Hermite, garantindo a continuidade de deslocamentos e rotações. Para elementos com rótulas, a interpolação é corrigida de modo a garantir a continuidade da curva elástica, impondo a condição de momento fletor nulo nas extremidades rotuladas.

Os diagramas de esforços internos ao longo de cada elemento são elaborados utilizando as equações de equilíbrio e as relações constitutivas, considerando os efeitos das cargas distribuídas quando presentes.

A implementação descrita nesta seção constitui a base da ferramenta computacional desenvolvida, permitindo a análise linear completa de pórticos planos com diferentes configurações de vinculação, carregamentos e propriedades geométricas.

## 4.2 Implementação da Função de Cálculo da Carga Crítica de Flambagem

A segunda etapa do desenvolvimento consistiu na implementação da função de cálculo da carga crítica de flambagem, incorporando os conceitos de rigidez geométrica e análise de estabilidade já apresentados. A abordagem adotada teve como base o método desenvolvido por Almeida (1985), seguindo sua formulação matricial para a rigidez do sistema e utilizando o método da bisseção como estratégia iterativa para a determinação do fator de carga crítica.

### 4.2.1 Matriz de Rigidez Geométrica

A matriz de rigidez geométrica é implementada conforme a formulação apresentada na Equação ?? do Referencial Teórico, seguindo o desenvolvimento de Almeida (1985). Para cada elemento da estrutura, a matriz  $\mathbf{K}_g$  é calculada em função da força axial atuante no elemento e de seu comprimento, considerando a convenção de sinais onde forças de compressão são positivas.

A montagem da matriz de rigidez geométrica global segue o mesmo procedimento de superposição direta utilizado para a matriz de rigidez elástica. Cada elemento contribui com sua matriz  $\mathbf{K}_g$  local, transformada para o sistema de coordenadas global através da matriz de rotação, e os termos são acumulados nas posições correspondentes aos graus de liberdade dos nós inicial e final do elemento.

A função de cálculo da carga crítica foi implementada de modo a abranger tanto pórticos com nós perfeitamente rígidos quanto estruturas com liberações de momento fletor nas extremidades. Essa adaptação foi possível através das transformações de congruência utilizando as matrizes de incidência cinemática, aplicadas diretamente sobre a matriz de rigidez geométrica do elemento padrão. Essa versatilidade permite que o programa analise a estabilidade global de uma ampla gama de tipologias estruturais, considerando corretamente os efeitos das diferentes condições de vinculação interna no fenômeno da flambagem.

Para estruturas submetidas a múltiplos carregamentos, foi definido um padrão de carregamento de referência, correspondente às forças aplicadas na análise linear inicial. A matriz de rigidez geométrica global é calculada considerando os esforços axiais provenientes deste carregamento de referência, conforme estabelecido na Equação 3.24.

#### 4.2.2 Método da Bisseção com Verificação de Estabilidade

A determinação do fator de carga crítica é realizada através do método da bisseção, conforme proposto por Almeida (1985). Este método iterativo baseia-se na busca sistemática do valor de  $c$  para o qual a matriz de rigidez tangente da estrutura deixa de ser positiva definida, caracterizando a transição entre os estados de equilíbrio estável e instável.

A matriz de rigidez tangente é expressa por:

$$\mathbf{K}_t(c) = \mathbf{K}_e + c \cdot \mathbf{K}_g \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{K}_e$  é a matriz de rigidez elástica global e  $\mathbf{K}_g$  é a matriz de rigidez geométrica global calculada para o carregamento de referência.

O critério de estabilidade é verificado através da decomposição de Cholesky da matriz de rigidez tangente aplicada aos graus de liberdade livres. A escolha deste método justificou-se por suas propriedades matemáticas que se alinham perfeitamente com o problema físico de estabilidade estrutural. A decomposição de Cholesky só é possível quando a matriz é simétrica e positiva definida, condições que correspondem exatamente a uma estrutura em equilíbrio estável. Quando a decomposição falha, isso indica que a matriz não é mais positiva definida, caracterizando numericamente o ponto de instabilidade.

A biblioteca SciPy fornece a função ‘`scipy.linalg.cholesky()`’ para realizar a fatoraçoão  $\mathbf{K}_t = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T$ , onde  $\mathbf{L}$  é uma matriz triangular inferior. O algoritmo de bisseção é estruturado da seguinte forma:

1. Define-se um valor inicial de busca  $c_{\text{inicial}}$  e um passo inicial  $\Delta c_{\text{inicial}}$  para o incremento de carga.
2. Para cada valor de  $c$  testado, constrói-se a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_t(c)$  aplicada apenas aos graus de liberdade livres, após imposição das condições de contorno, e tenta-se realizar a decomposição de Cholesky.
3. Se a decomposição é bem-sucedida, a estrutura permanece estável para aquele nível de carregamento. O fator de carga é incrementado:  $c \leftarrow c + \Delta c$ .
4. Se a decomposição falha, a estrutura torna-se instável. O fator de carga é decrementado:  $c \leftarrow c - \Delta c$ , e o índice do pivô que causou a falha é registrado, identificando o grau de liberdade crítico.

5. Quando ocorre a primeira troca de sinal (transição estável-instável ou instável-estável), o passo é reduzido pela metade:  $\Delta c \leftarrow \Delta c/2$ . Nas iterações subsequentes sem troca de sinal, o passo é aumentado por um fator de amplificação para acelerar a convergência.
6. O processo iterativo é repetido até que a tolerância  $TOL = |\Delta c/c|$  seja inferior a uma tolerância especificada, tipicamente  $10^{-4}$ , ou até que um número máximo de iterações seja atingido.

Este procedimento garante a convergência para o fator de carga crítica  $c_{cr}$  com precisão controlada, sem a necessidade de calcular explicitamente o determinante da matriz, evitando problemas numéricos de *overflow* ou *underflow* comuns em matrizes de grande porte.

### 4.2.3 Determinação do Modo de Flambagem

Uma vez determinado o fator de carga crítica  $c_{cr}$  e identificado o grau de liberdade crítico, o modo de flambagem correspondente foi calculado através do método da iteração inversa combinado com o Método da Penalidade (COOK *et al.*, 2001). Este procedimento permitiu obter o autovetor associado ao autovalor conhecido sem a necessidade de solucionar o problema completo de autovalores e autovetores da estrutura.

O modo de flambagem  $\phi$  satisfaz a equação:

$$(\mathbf{K}_e + c_{cr} \cdot \mathbf{K}_g) \cdot \phi = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

Como a matriz de rigidez tangente no ponto crítico é singular, o sistema original admite infinitas soluções proporcionais. Para contornar essa singularidade e extrair uma solução particular, que posteriormente será normalizada, foi imposta uma condição de contorno artificial no grau de liberdade crítico, identificado durante o processo de bisseção, utilizando o conceito numérico de uma mola de rigidez infinita.

O procedimento consistiu em:

1. Construir a matriz de rigidez tangente crítica  $\mathbf{K}_t(c_{cr})$ , considerando apenas os graus de liberdade livres.
2. Identificar o grau de liberdade crítico  $i$  e penalizar a matriz de rigidez adicionando um valor escalar arbitrariamente grande (fator de penalidade  $P$ ) ao elemento correspondente na diagonal principal, tal que  $K_{t,ii}^* = K_{t,ii} + P$ . Fisicamente, isso equivale a inserir um apoio elástico de rigidez infinita na direção da instabilidade.

3. Criar um vetor de forças fictício  $\mathbf{b}$  com todos os elementos nulos, exceto na posição correspondente ao grau de liberdade crítico  $i$ , onde foi aplicada uma força proporcional à penalidade para forçar um deslocamento numérico prescrito  $\delta$ , resultando em  $b_i = P \cdot \delta$ .
4. Resolver o sistema linear modificado e não-singular:

$$\mathbf{K}_t^*(c_{cr}) \cdot \phi^* = \mathbf{b} \quad (4.10)$$

5. Normalizar o vetor solução dividindo todos os seus componentes pelo valor máximo em módulo, obtendo o modo de flambagem adimensional.
6. Expandir o vetor solução normalizado para incluir os graus de liberdade restritos com os deslocamentos nulos, resultando no modo de flambagem global completo da estrutura.

O modo de flambagem calculado representa a configuração deformada característica da instabilidade, permitindo a visualização gráfica da forma como a estrutura tende a perder estabilidade. Esta informação é essencial para a compreensão do comportamento estrutural e para a validação dos resultados.

### 4.3 Validação do Programa

A avaliação do programa desenvolvido foi estruturada em três frentes complementares, progredindo da análise teórica de elementos básicos para a validação de sistemas complexos através de análises comparativas com o software comercial SAP2000. Esta etapa permitiu verificar a precisão da implementação numérica e atestar a confiabilidade do código frente a variações geométricas e de rigidez na estabilidade global.

#### 4.3.1 Metodologia de Análise e Grupos de Teste

Para garantir o rigor acadêmico e a fidedignidade dos resultados, as simulações foram organizadas em três grupos distintos. Em todos os cenários, a metodologia de teste seguiu um padrão estruturado: validar os resultados obtidos, compará-los com referenciais consolidados (teóricos ou computacionais), analisar a convergência da carga crítica em função da discretização adotada e investigar a influência da principal variável em estudo no comportamento da estrutura. Os grupos foram assim definidos:

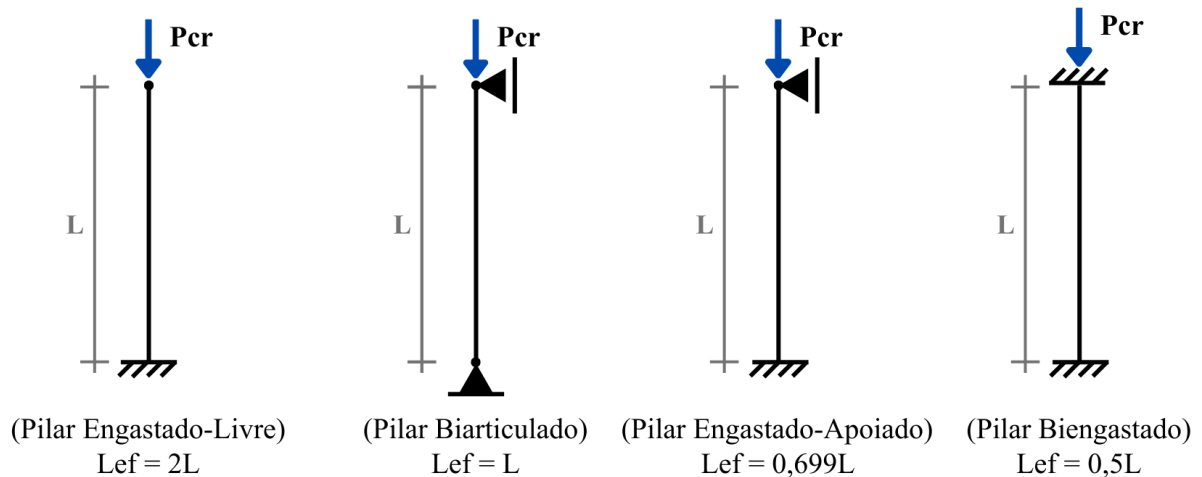
- **Grupo I (Elementos Isolados):** focado na comparação com as soluções analíticas clássicas de Euler. Além do estudo de convergência da malha, objetivou-se avaliar a influência das diferentes condições de contorno na carga crítica de pilares sob compressão axial.

- **Grupo II (Pórticos Planos):** destinado à validação da estabilidade global em comparação com o software SAP2000. Aliado à análise de convergência, o foco foi investigar a influência das vinculação externas e das variações na geometria do sistema sobre o modo de flambagem e sobre a carga crítica.
- **Grupo III (Sensibilidade à Orientação da Inércia):** voltado à validação da rigidez flexional, também aferida contra o SAP2000. O objetivo, mantendo a verificação da malha, foi avaliar a influência da orientação da seção transversal — especificamente o impacto da alternância entre o maior e o menor momento de inércia ( $I$ ) de vigas e pilares — na carga crítica global.

#### 4.3.2 Grupo I: Elementos Estruturais Isolados

A validação quantitativa foi realizada através da análise de colunas isoladas submetidas a cargas axiais de compressão, considerando as condições de contorno clássicas: engastada-livre, biarticulada, biengastada e engastada-apoiada. A Figura 16 apresenta a configuração de cada caso e os respectivos comprimentos efetivos de flambagem ( $L_e$ ), conforme estabelecido por Timoshenko e Gere (1961).

Figura 16 – Casos de validação para elementos estruturais isolados



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_e^2}$$

Fonte: Autor (2026).

Para estes casos e demais casos, a precisão numérica foi avaliada pelo erro relativo entre a carga crítica obtida pelo programa ( $P_{cr,num}$ ) e a carga crítica de referência ( $P_{cr,ref}$ ), que

neste caso é solução analítica de Euler. A fórmula do erro relativo é dada pela Equação 4.11.

$$\text{Erro} = \left| \frac{P_{cr,num} - P_{cr,ref}}{P_{cr,ref}} \right| \times 100\% \quad (4.11)$$

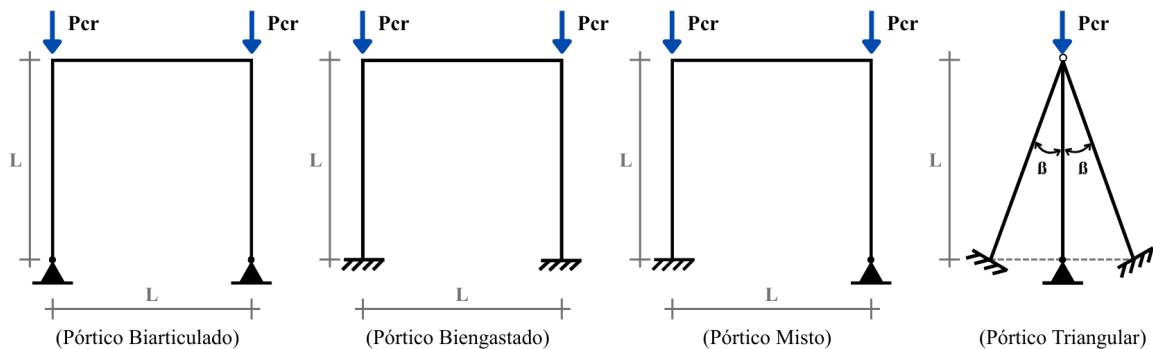
O teste contemplou diferentes níveis de discretização, variando de 1 a 8 elementos por barra, permitindo observar a convergência dos resultados à medida que a malha foi refinada.

### 4.3.3 Grupo II: Pórticos Planos

Uma vez validada a formulação para elementos isolados, a coerência do programa para sistemas complexos foi aferida através do software SAP2000. Diferentemente dos pilares, a estabilidade de pórticos envolve a interação complexa entre múltiplos membros, onde a escassez de soluções analíticas fechadas torna a comparação com ferramentas comerciais consolidadas o procedimento padrão para validação numérica.

Nesta etapa, avaliaram-se pórticos com quatro configurações distintas: biarticulado, biengastado, misto (um apoio engastado e outro rotulado) e um pórtico de geometria triangular, conforme é mostrado na Figura 17. A análise nestes casos baseou-se na comparação direta do fator de carga crítica numérico e na observação dos modos de flambagem gerados pelo programa em relação à análise de *Buckling* (flambagem linear) processada no SAP2000. Verificou-se se as configurações deformadas correspondiam aos fenômenos físicos esperados para cada software, atestando a integridade da formulação da matriz geométrica no código desenvolvido.

Figura 17 – Configurações de pórticos para aplicação

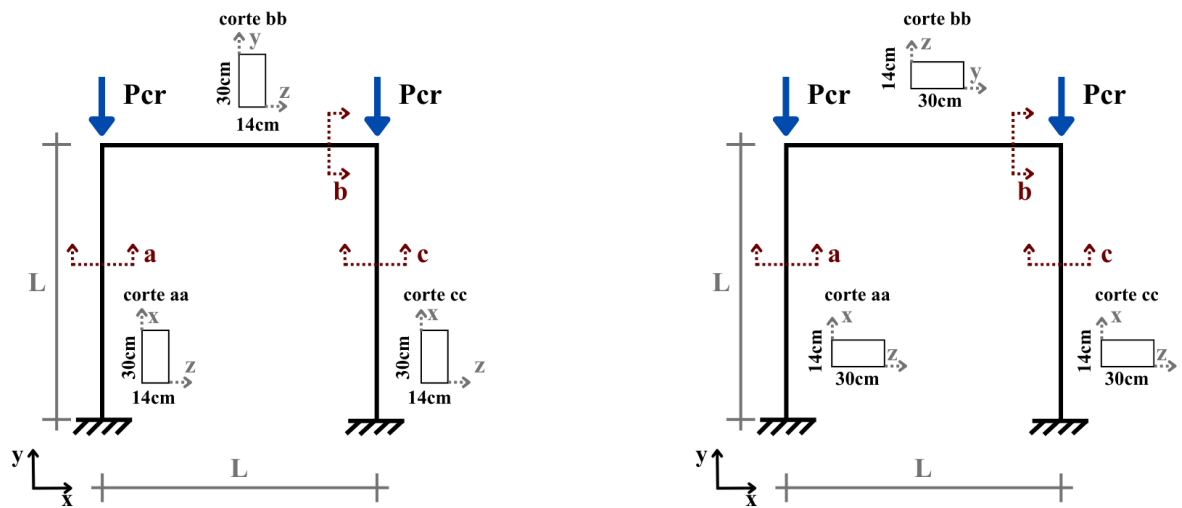


Fonte: Autor (2026).

#### 4.3.4 Grupo III: Sensibilidade à Orientação da Inércia

O terceiro grupo de testes investigou como a rigidez flexional dos elementos, ditada pela orientação da seção transversal, influenciou a carga crítica da estrutura, sendo todos os cenários sistematicamente contraprovados no SAP2000. Para este estudo, foram simulados dois modelos de pórticos com geometrias idênticas, utilizando seções retangulares para vigas e pilares, variando-se apenas a direção de atuação da inércia em relação ao plano de flexão do pórtico, assim como é mostrado no diagrama 2D da Figura 18 e na perspectiva isométrica da Figura 19.

Figura 18 – Pórticos com variação da direção de maior inércia.

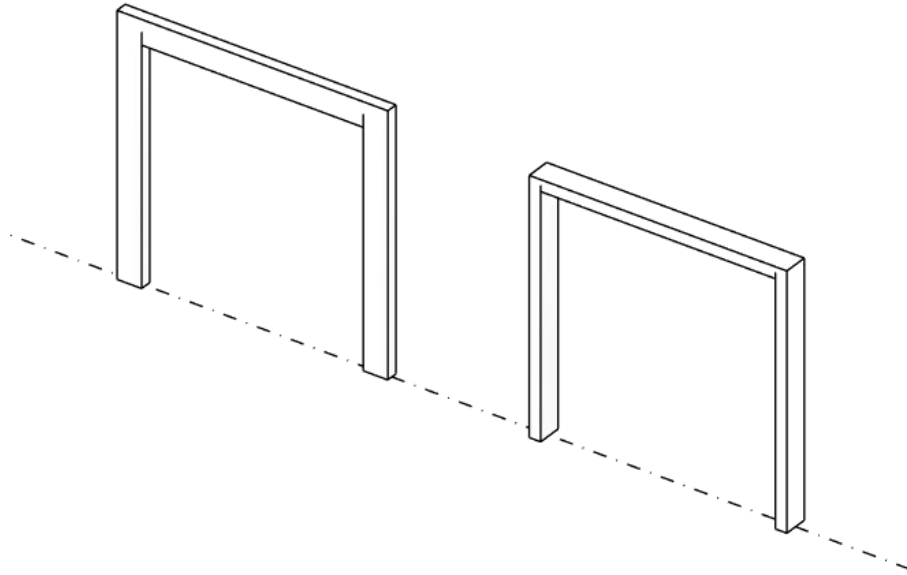


(Pórtico Biengastado - Maiores inércias)

(Pórtico Biengastado - Menores inércias)

Fonte: Autor (2026).

Figura 19 – Isométrico - Pórticos com variação da direção de maior inércia.



Fonte: Autor (2026).

No primeiro cenário, as seções de todos os elementos foram orientadas de modo que o maior momento de inércia da seção transversal resistisse aos esforços de flexão. No segundo cenário, as seções foram rotacionadas para que a rigidez do pórtico fosse governada pelo menor momento de inércia da seção.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta e discute os resultados das simulações numéricas realizadas pelo programa desenvolvido, denominado **PortPlan**. A validação do software foi estruturada nos três grupos de testes definidos na Metodologia.

Para todas as análises numéricas, adotou-se um material com módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ) de 200 GPa. A seção transversal de referência é quadrada, com base de 20 cm e altura de 20 cm, resultando em uma área ( $A$ ) de 0,04 m<sup>2</sup> e momento de inércia à flexão principal ( $I$ ) de  $1,3333 \times 10^{-4}$  m<sup>4</sup>. Estas propriedades permaneceram constantes nos Grupos I e II. Apenas no Grupo III foi trabalhada com uma seção diferente para fins de estudo de sensibilidade.

### 5.1 Resultados do Grupo I: Elementos Estruturais Isolados

A primeira etapa de validação do PortPlan consistiu na análise da instabilidade de colunas isoladas, submetidas à compressão axial pura, variando-se as suas condições de contorno. Para estes testes, todas as colunas foram modeladas com um comprimento total  $L$  de 3 m.

A Tabela 1 apresenta a evolução da carga crítica obtida pelo PortPlan em função do número de elementos finitos adotados na discretização da barra, comparando cada valor com a formulação teórica.

Cabe destacar uma particularidade evidenciada na Tabela 1 para o pilar biengastado: o cálculo da carga crítica só foi possível a partir da discretização em dois elementos. Fisicamente, como o Método da Rigidez baseia a deformada nos deslocamentos nodais, um único elemento com ambas as extremidades totalmente restritas não possui graus de liberdade para girar ou transladar. Sem um nó interno, a barra torna-se cinematicamente travada e incapaz de desenvolver curvatura. A adoção de pelo menos dois elementos introduz um nó livre intermediário, fornecendo a flexibilidade necessária para que a estrutura possa configurar seu modo de flambagem.

Tabela 1 – Cargas críticas de flambagem - elementos isolados (pilares).

**Parte 1: Referência e Discretização de 1 a 2 elementos**

<b>ELEMENTOS ISOLADOS - PILARES</b>					
<i>Obs.: Valores de <math>P_{cr}</math> em unidade Newton.</i>					
<b>DESCRIÇÃO</b>	<b><math>P_{cr,ref}</math> (Euler)</b>	<b>1 elem.</b>		<b>2 elem.</b>	
		<b><math>P_{num}</math></b>	<b>Erro</b>	<b><math>P_{num}</math></b>	<b>Erro</b>
Engastado-Livre	7.676.358,98	7.364.984,39	4%	7.314.272,59	5%
Biarticulado	30.705.435,91	35.554.027,02	16%	29.445.017,29	4%
Engastado-Apoiado	62.843.579,76	88.883.907,01	41%	61.355.592,63	2%
Biengastado	122.821.743,66	-	-	118.517.366,54	4%

**Parte 2: Discretização de 3 a 5 elementos**

<b>ELEMENTOS ISOLADOS - PILARES</b>						
<i>Obs.: Valores de <math>P_{cr}</math> em unidade Newton.</i>						
<b>DESCRIÇÃO</b>	<b>3 elem.</b>		<b>4 elem.</b>		<b>5 elem.</b>	
	<b><math>P_{num}</math></b>	<b>Erro</b>	<b><math>P_{num}</math></b>	<b>Erro</b>	<b><math>P_{num}</math></b>	<b>Erro</b>
Engastado-Livre	7.312.461,46	5%	7.310.650,32	5%	7.310.650,32	5%
Biarticulado	29.280.930,09	5%	29.246.385,41	5%	29.246.385,41	5%
Engastado-Apoiado	60.191.733,98	4%	59.955.588,74	5%	59.871.251,16	5%
Biengastado	119.538.641,97	3%	117.858.479,17	4%	117.364.313,64	4%

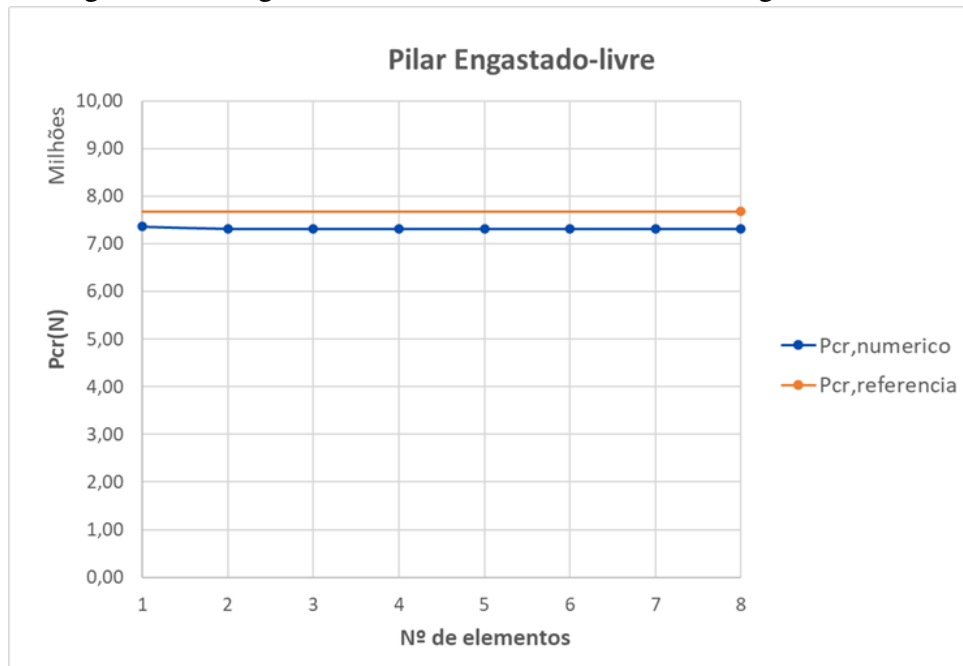
**Parte 3: Discretização de 6 a 8 elementos**

<b>ELEMENTOS ISOLADOS - PILARES</b>						
<i>Obs.: Valores de <math>P_{cr}</math> em unidade Newton.</i>						
<b>DESCRIÇÃO</b>	<b>6 elem.</b>		<b>7 elem.</b>		<b>8 elem.</b>	
	<b><math>P_{num}</math></b>	<b>Erro</b>	<b><math>P_{num}</math></b>	<b>Erro</b>	<b><math>P_{num}</math></b>	<b>Erro</b>
Engastado-Livre	7.310.650,32	5%	7.310.650,32	5%	7.310.650,32	5%
Biarticulado	29.237.749,24	5%	29.237.749,24	5%	29.237.749,24	5%
Engastado-Apoiado	59.854.383,64	5%	59.837.516,13	5%	59.837.513,13	5%
Biengastado	117.166.647,43	5%	117.067.814,32	5%	117.034.869,95	5%

Fonte: Autor (2026).

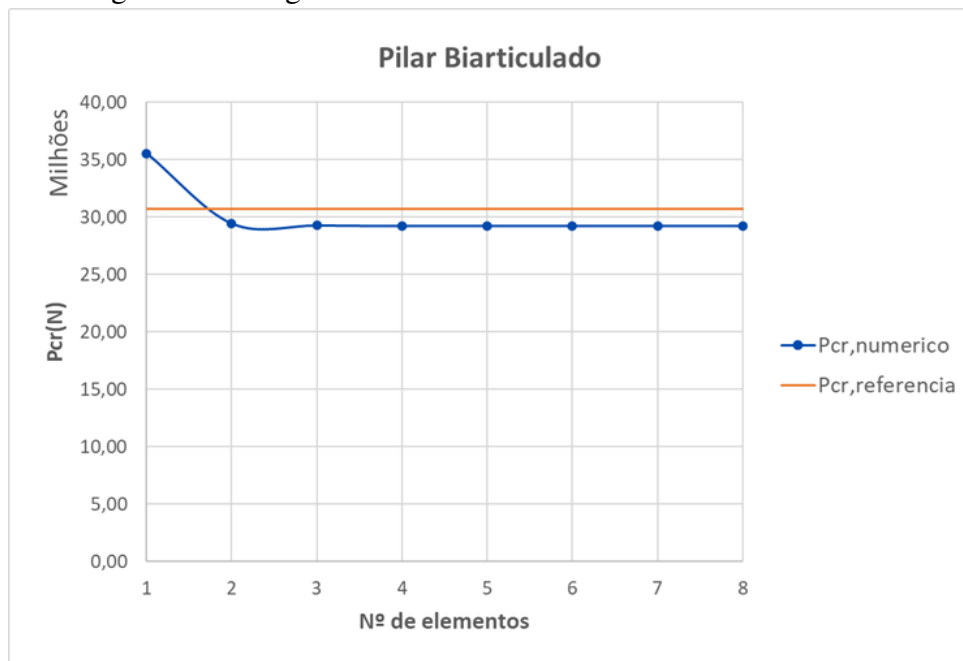
Para uma melhor visualização do comportamento assintótico da formulação numérica implementada, os dados obtidos na análise de convergência foram plotados graficamente. As Figuras a seguir apresentam o histórico de convergência para cada um dos pilares isolados analisados.

Figura 20 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pilar Engastado-Livre.



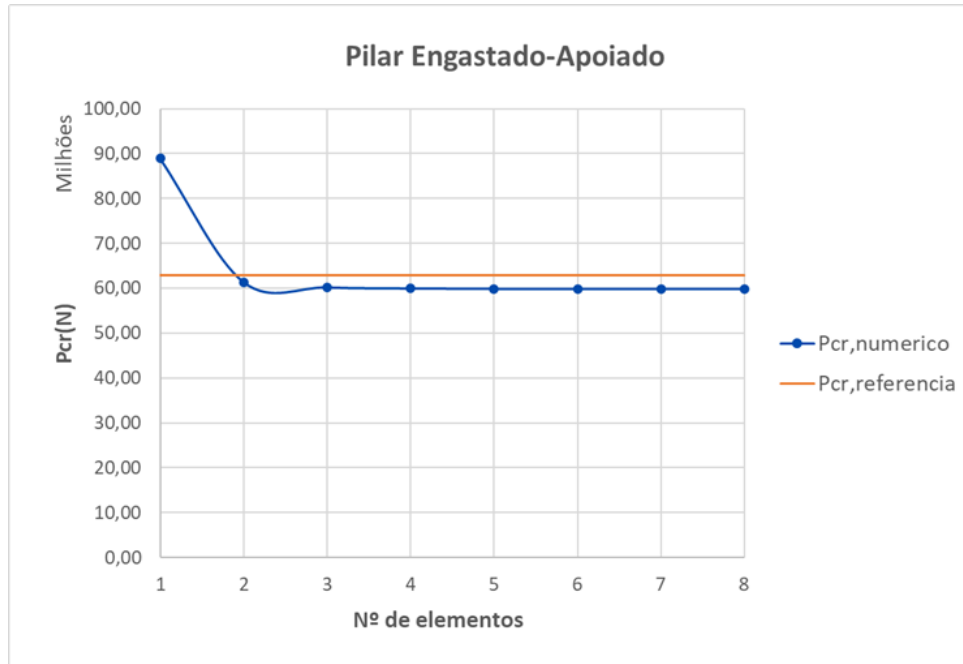
Fonte: Autor (2026).

Figura 21 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pilar Biarticulado.



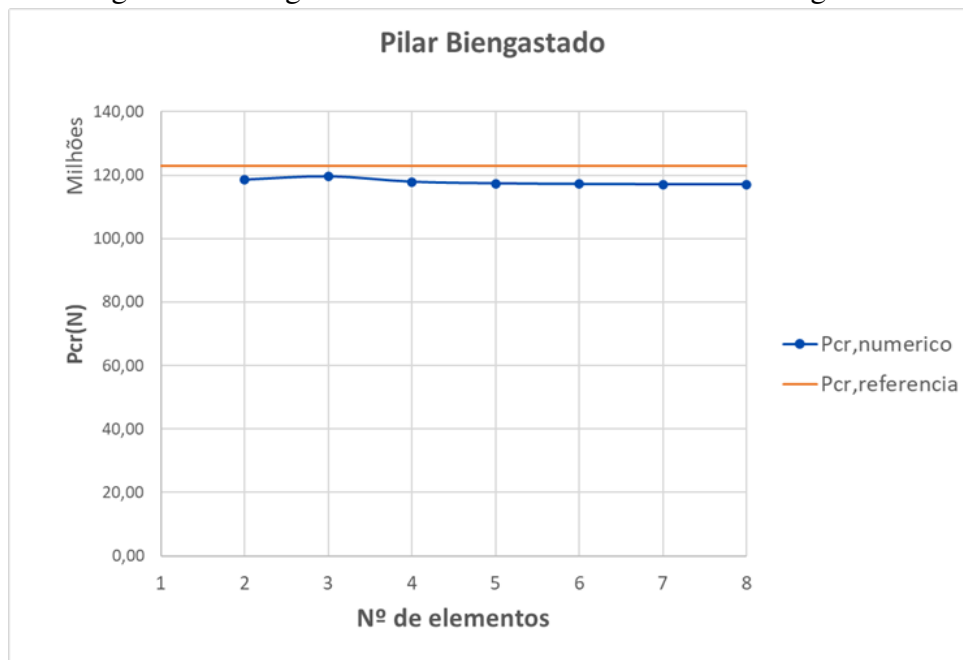
Fonte: Autor (2026).

Figura 22 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pilar Engastado-Apoiado.



Fonte: Autor (2026).

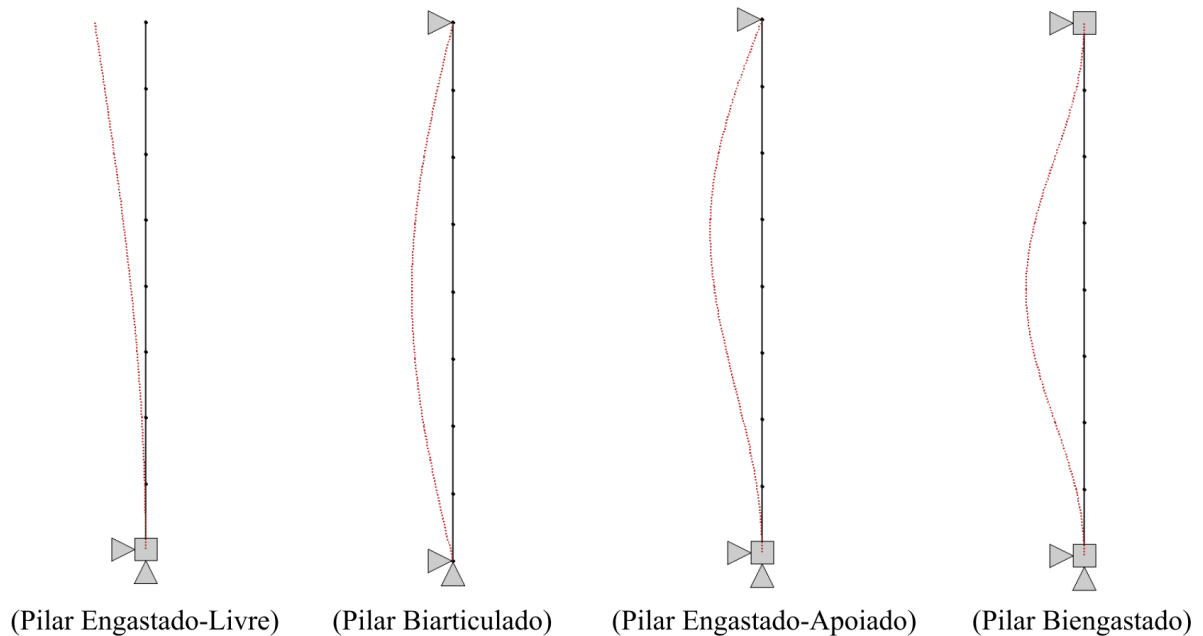
Figura 23 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pilar Biengastado.



Fonte: Autor (2026).

Além disso, na Figura 24 são exibidos os modos de flambagem retornados pelo programa PortPlan para cada tipo de pilar.

Figura 24 – Modos de flambagem - Elementos Isolados (pilares).



Fonte: Autor (2026).

A análise dos gráficos e da tabela consolida a validação numérica do programa *PortPlan*. O algoritmo demonstra uma convergência rápida e estável, exigindo uma discretização de apenas 3 a 4 elementos por barra para atingir a estabilização, com um erro relativo residual na casa dos 5% frente à solução exata de Euler.

Observa-se que pilares com extremidades mais livres, como o engastado-livre e o biarticulado, apresentam convergência quase imediata. Em contrapartida, o pilar engastado-apoiado evidencia o clássico fenômeno de rigidez artificial da malha (*mesh locking*), conforme fundamentado por Cook *et al.* (2001). Com apenas 1 elemento, o modelo apresenta uma forte superestimativa da carga crítica, pois os polinômios interpoladores da formulação restringem excessivamente a configuração deformada real. Contudo, ao subdividir a barra, o sistema ganha os graus de liberdade necessários para se deformar, e a curva numérica tangencia rapidamente a assíntota de referência. Conclui-se que a matriz de rigidez geométrica está calibrada e o programa está apto para a análise de outros sistemas.

## 5.2 Resultados do Grupo II: Aplicações em Pórticos Planos

A segunda etapa de validação do PortPlan expandiu a análise para sistemas estruturais reticulados. Para os pórticos, adotou-se uma geometria quadrada com dimensões globais de  $3\text{ m} \times 3\text{ m}$ , variando-se as restrições de apoio da base conforme foi descrito na metodologia. Adicionalmente, avaliou-se um pórtico com geometria triangular, possuindo altura útil de  $3\text{ m}$  e ângulo de inclinação das hastes  $\beta = 30^\circ$ .

A Tabela 2 apresenta a evolução da carga crítica sistêmica obtida pelo programa em função do refinamento da malha de elementos finitos para cada barra.

Tabela 2 – Cargas críticas de flambagem - Pórticos planos.

### Parte 1: Discretização de 1 a 3 elementos

<b>PÓRTICOS - CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM</b>			
<i>Obs.: Valores de <math>P_{cr}</math> em unidade Newton.</i>			
<b>DESCRIÇÃO</b>	<b>1 elem. <math>P_{num}</math></b>	<b>2 elem. <math>P_{num}</math></b>	<b>3 elem. <math>P_{num}</math></b>
Pórtico Biarticulado	5.397.909,79	5.384.869,61	5.383.420,70
Pórtico Biengastado	22.011.867,01	21.884.742,61	21.829.471,13
Pórtico Misto	13.210.326,19	13.104.204,95	13.093.592,83
Pórtico Triangular	81.754.745,65	67.748.381,46	67.343.561,06

### Parte 2: Discretização de 4 a 6 elementos

<b>PÓRTICOS - CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM</b>			
<i>Obs.: Valores de <math>P_{cr}</math> em unidade Newton.</i>			
<b>DESCRIÇÃO</b>	<b>4 elem. <math>P_{num}</math></b>	<b>5 elem. <math>P_{num}</math></b>	<b>6 elem. <math>P_{num}</math></b>
Pórtico Biarticulado	5.383.420,70	5.383.420,70	5.383.420,70
Pórtico Biengastado	21.823.943,99	21.818.416,84	21.818.416,84
Pórtico Misto	13.090.055,46	13.090.055,46	13.090.055,46
Pórtico Triangular	67.276.090,99	67.259.223,48	67.242.355,96

### Parte 3: Discretização de 7 a 8 elementos

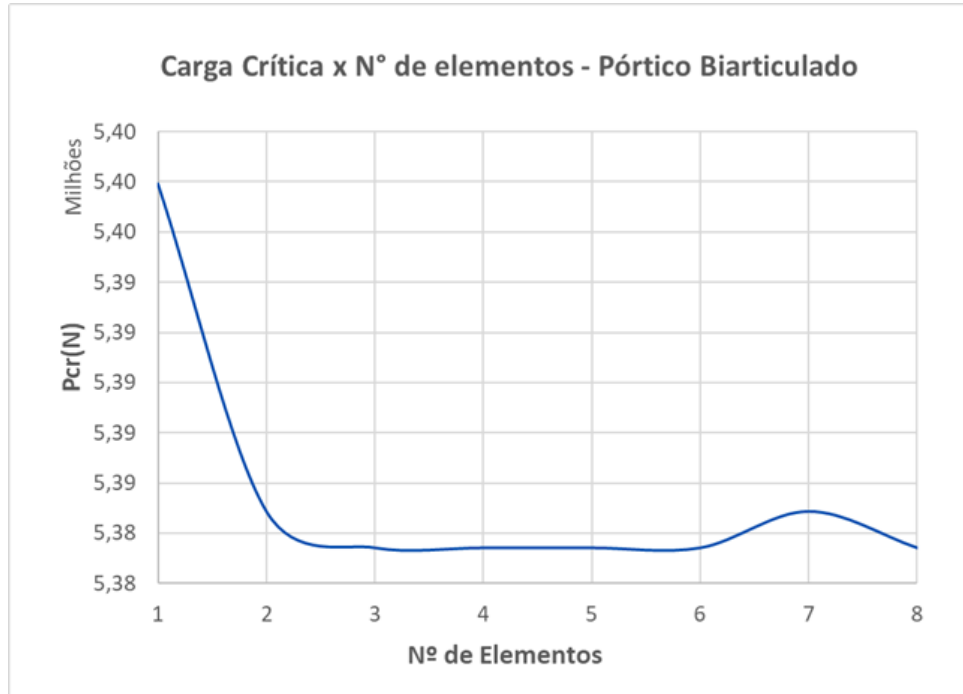
<b>PÓRTICOS - CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM</b>		
<i>Obs.: Valores de <math>P_{cr}</math> em unidade Newton.</i>		
<b>DESCRIÇÃO</b>	<b>7 elem. <math>P_{num}</math></b>	<b>8 elem. <math>P_{num}</math></b>
Pórtico Biarticulado	5.384.869,61	5.383.420,70
Pórtico Biengastado	21.823.943,99	21.823.943,99
Pórtico Misto	13.093.592,83	13.093.592,83
Pórtico Triangular	67.242.355,96	67.242.355,96

Fonte: Autor (2026).

Para a visualização do comportamento numérico, os dados da análise de convergência

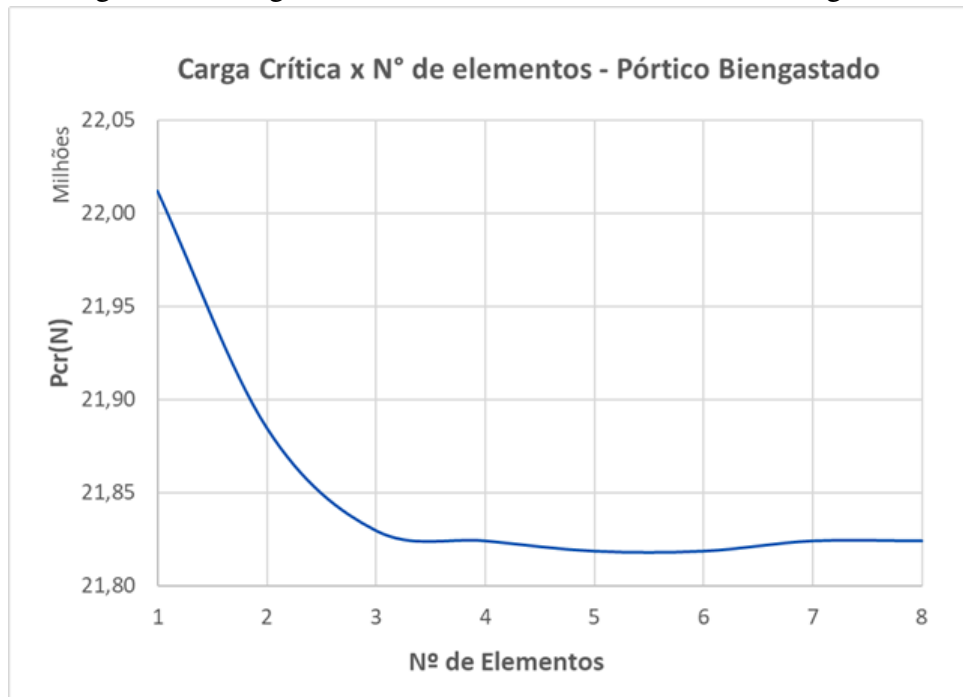
foram plotados graficamente. As Figuras a seguir apresentam o decaimento e a subsequente estabilização da carga crítica em função da discretização adotada para cada pórtico.

Figura 25 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pórtico Biarticulado.



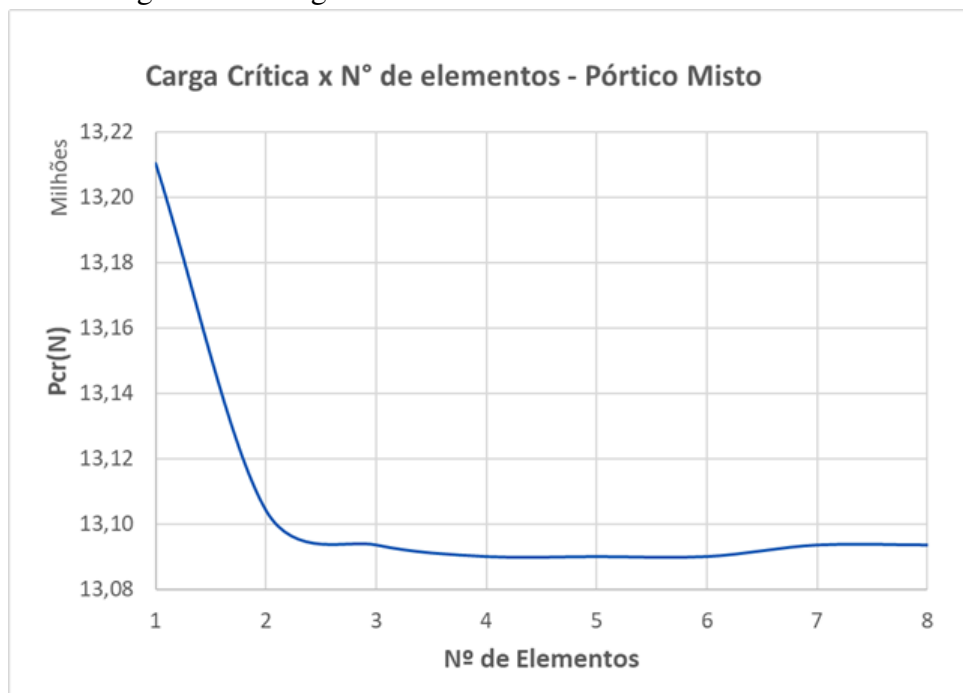
Fonte: Autor (2026).

Figura 26 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pórtico Biengastado.



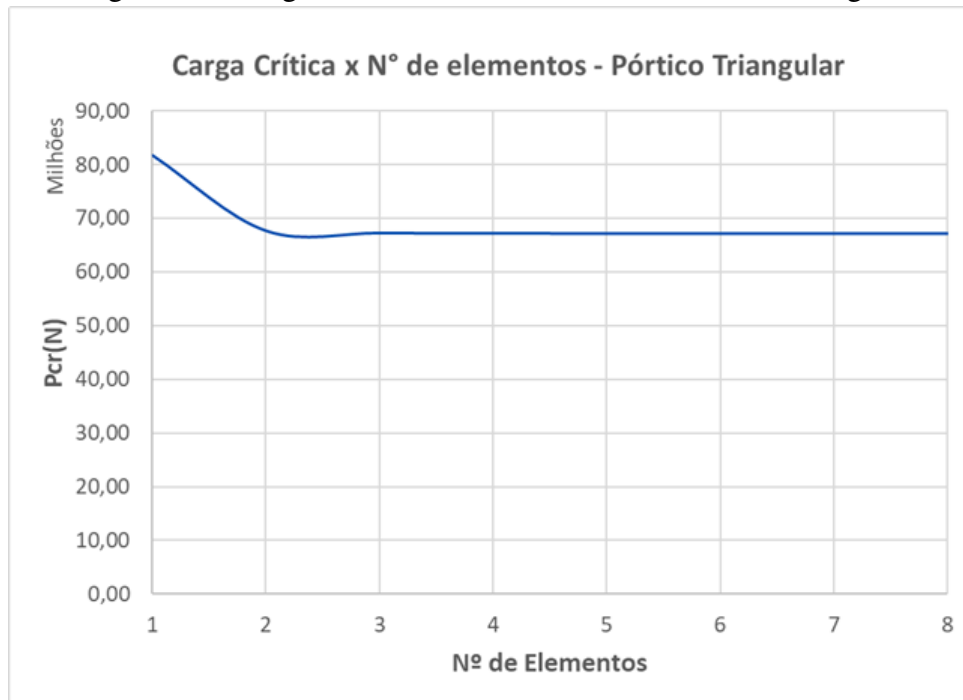
Fonte: Autor (2026).

Figura 27 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pórtico Misto.



Fonte: Autor (2026).

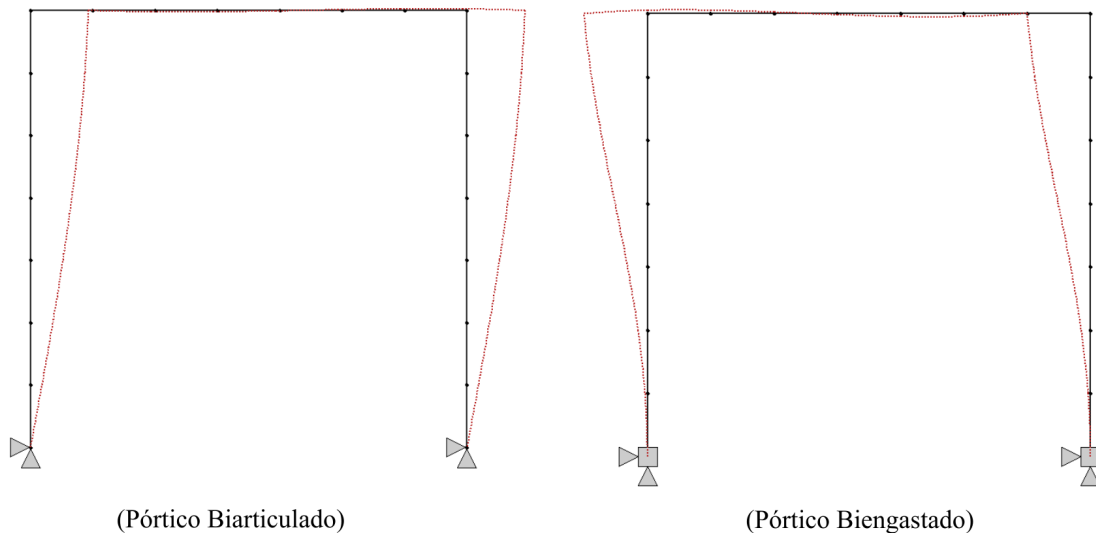
Figura 28 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pórtico Triangular.



Fonte: Autor (2026).

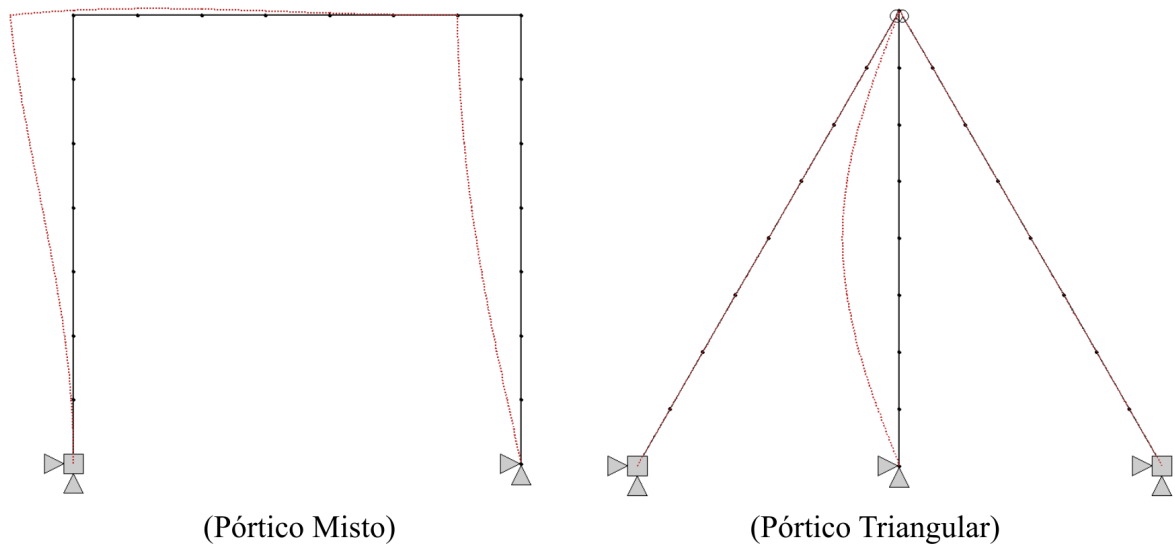
A instabilidade global dos sistemas pode ser fisicamente interpretada por meio de suas configurações deformadas críticas. As Figuras 29 e 30 exibem os modos de flambagem sistêmicos obtidos pelo PortPlan.

Figura 29 – Modos de flambagem - Pórticos Biarticulado e Biengastado.



Fonte: Autor (2026).

Figura 30 – Modos de flambagem - Pórticos Misto e Triangular.



Fonte: Autor (2026).

A transição da análise de barras isoladas para pórticos complexos demonstrou a coerência da formulação matricial implementada. A convergência da carga crítica sistêmica espelha o comportamento verificado no Grupo I, com os multiplicadores de carga decaindo assintoticamente conforme a malha é refinada, mitigando o efeito de rigidez artificial. Destaca-se o comportamento do pórtico triangular, cuja modelagem com apenas um elemento por barra gerou uma forte superestimativa inicial da resistência global à flambagem, exigindo uma discretização ligeiramente maior para que o sistema manifestasse sua flexibilidade real e a carga crítica estacionasse na casa dos 67,2 milhões de Newtons.

Para atestar em definitivo a acurácia do algoritmo no cálculo das estruturas porticadas, os resultados estabilizados do *PortPlan* foram confrontados com as saídas geradas pelo software comercial SAP2000. A Tabela 3 compila as cargas críticas sistêmicas dos pórticos analisados neste Grupo II. Em ambos os programas, adotou-se rigorosamente a mesma malha com discretização de 8 elementos por barra.

Tabela 3 – Comparativo das cargas críticas de flambagem: PortPlan x SAP2000.

<b>CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM - PORTPLAN X SAP</b>			
<i>Obs1.: Valores de <math>P_{cr}</math> em Newton.</i>			
<i>Obs2.: Discretização em 8 elementos adotada tanto para PortPlan, quanto para o SAP2000.</i>			
<b>DESCRIÇÃO</b>	<b>PORTPLAN</b>	<b>SAP2000</b>	<b>ERRO RELATIVO</b>
Pórtico Biarticulado	5.383.420,70	5.383.320,07	0,00%
Pórtico Biengastado	21.823.943,99	21.817.360,47	0,03%
Pórtico Misto	13.093.592,83	13.088.921,22	0,04%
Pórtico Triangular	67.242.355,96	67.243.343,90	0,00%

Fonte: Autor (2026).

A comparação quantitativa valida a precisão da implementação computacional do algoritmo. Com um erro relativo máximo de 0,04%, comprova-se que as matrizes de rigidez elástica e geométrica do PortPlan foram estruturadas em estrita conformidade com a formulação teórica do Método dos Elementos Finitos. Adicionalmente, de forma qualitativa, foi possível ainda observar a perfeita correspondência dos modos de flambagem gerados pelo programa com os modos obtidos via SAP2000.

### 5.3 Resultados do Grupo III: Sensibilidade à Orientação da Inércia

A terceira e última etapa de validação objetivou avaliar a sensibilidade do algoritmo face à orientação dos eixos principais de inércia da secção transversal das barras. Para este estudo, retomou-se a geometria do pórtico quadrado biengastado de 3 m × 3 m analisado no Grupo II. Considerando uma secção retangular com dimensões de 0,14 m por 0,30 m, a estrutura foi simulada em dois cenários distintos: o primeiro orientando as secções para que a flexão no plano do pórtico requisitasse o maior momento de inércia ( $I = 3,15 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ ); e o segundo promovendo a rotação das secções em 90°, forçando o sistema a flambar em torno do eixo de menor rigidez transversal, com o menor momento de inércia ( $I = 6,86 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ ).

A Tabela 4 documenta a evolução e a estabilização das cargas críticas obtidas pelo PortPlan em função do refinamento da malha para ambos os cenários.

Tabela 4 – Cargas críticas de flambagem - Pórticos com variação de inércia.

**Parte 1: Discretização de 1 a 3 elementos**

<b>PÓRTICOS COM VARIAÇÃO DE INÉRCIA - CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM</b>			
<i>Obs.: Valores de <math>P_{cr}</math> em unidade Newton.</i>			
<b>DESCRIÇÃO</b>	<b>1 elem. <math>P_{num}</math></b>	<b>2 elem. <math>P_{num}</math></b>	<b>3 elem. <math>P_{num}</math></b>
Pórtico Biengastado - Maiores inércias	51.864.240,98	51.553.878,67	51.432.432,55
Pórtico Biengastado - Menores inércias	11.337.993,80	11.272.906,10	11.244.607,11

**Parte 2: Discretização de 4 a 6 elementos**

<b>PÓRTICOS COM VARIAÇÃO DE INÉRCIA - CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM</b>			
<i>Obs.: Valores de <math>P_{cr}</math> em unidade Newton.</i>			
<b>DESCRIÇÃO</b>	<b>4 elem. <math>P_{num}</math></b>	<b>5 elem. <math>P_{num}</math></b>	<b>6 elem. <math>P_{num}</math></b>
Pórtico Biengastado - Maiores inércias	51.418.938,54	51.405.444,52	51.405.444,52
Pórtico Biengastado - Menores inércias	11.238.947,31	11.238.947,31	11.238.947,31

**Parte 3: Discretização de 7 a 8 elementos**

<b>PÓRTICOS COM VARIAÇÃO DE INÉRCIA - CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM</b>		
<i>Obs.: Valores de <math>P_{cr}</math> em unidade Newton.</i>		
<b>DESCRIÇÃO</b>	<b>7 elem. <math>P_{num}</math></b>	<b>8 elem. <math>P_{num}</math></b>
Pórtico Biengastado - Maiores inércias	51.418.938,54	51.418.938,54
Pórtico Biengastado - Menores inércias	11.241.777,21	11.241.777,21

Fonte: Autor (2026).

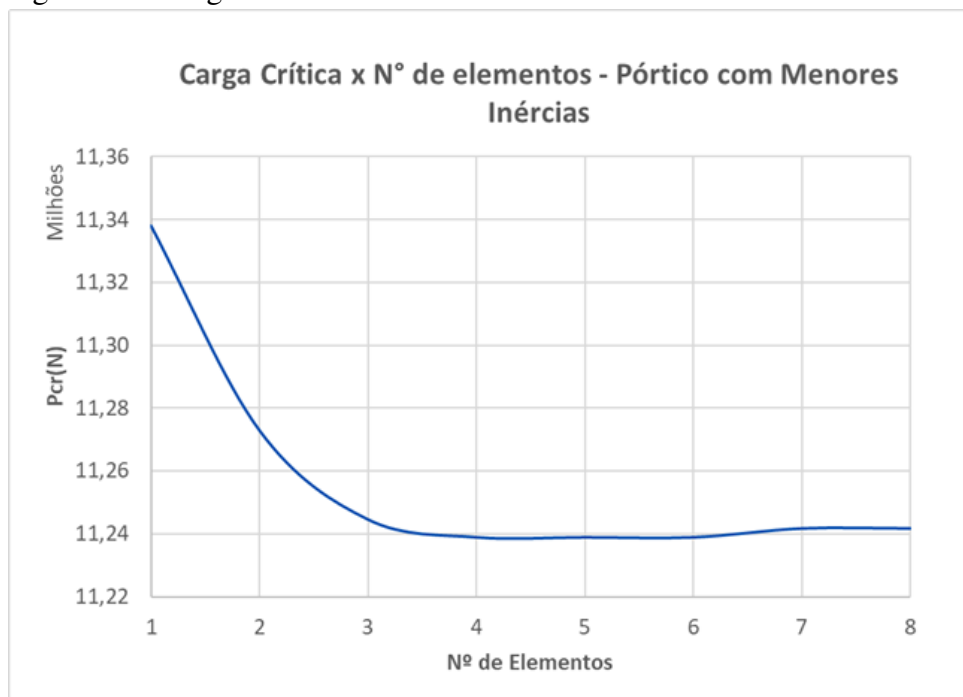
O comportamento assintótico da formulação numérica para a variação da inércia é ilustrado nas Figuras 31 e 32, evidenciando visualmente a estabilização do fator de carga crítica a partir da discretização em quatro elementos.

Figura 31 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pórtico com Maiores Inércias.



Fonte: Autor (2026).

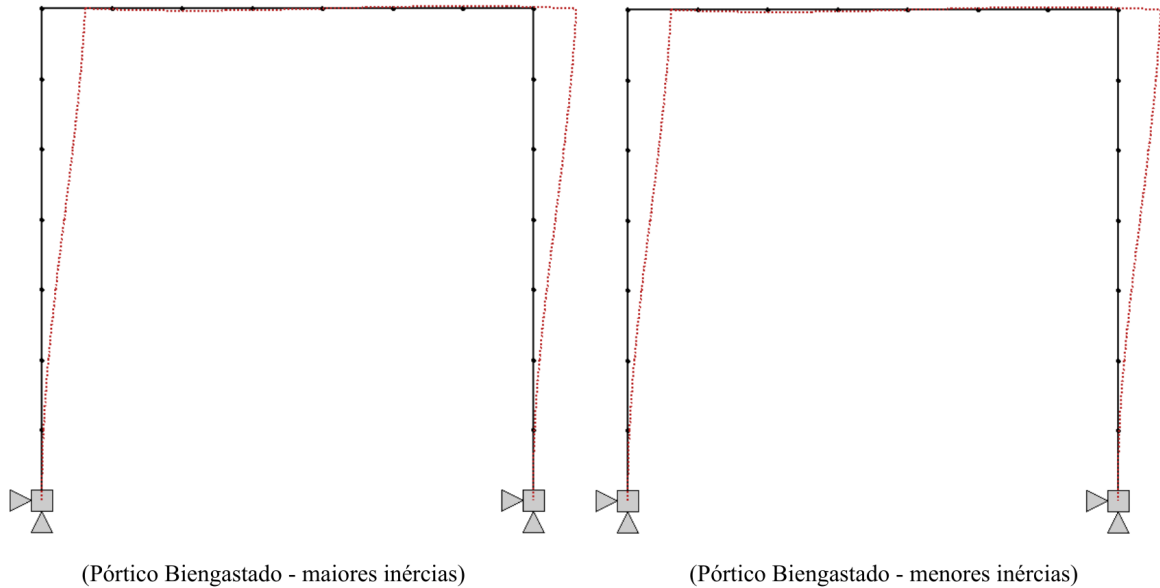
Figura 32 – Carga Crítica x N° de Elementos - Pórtico com Menores Inércias.



Fonte: Autor (2026).

A Figura 33 expõe as configurações deformadas no instante da flambagem traçadas pelo PortPlan para os dois pórticos.

Figura 33 – Modos de flambagem - Pórticos com variação de inércia.



Fonte: Autor (2026).

Por fim, a Tabela 5 estabelece a validação quantitativa dos valores estabilizados obtidos no ambiente de programação nativo contra a modelagem análoga no software comercial SAP2000.

Tabela 5 – Comparativo das cargas críticas de flambagem: PortPlan x SAP2000 (Variação de Inércia).

<b>CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM - PORTPLAN X SAP</b>			
<i>Obs1.: Valores de <math>P_{cr}</math> em Newton.</i>			
<i>Obs2.: Discretização em 8 elementos adotada tanto para PortPlan, quanto para o SAP2000.</i>			
<b>DESCRIÇÃO</b>	<b>PORTPLAN</b>	<b>SAP2000</b>	<b>ERRO RELATIVO</b>
Pórtico Biengastado - Maiores inércias	51.418.938,54	51.405.287,20	0,03%
Pórtico Biengastado - Menores inércias	11.241.777,21	11.237.374,19	0,04%

Fonte: Autor (2026).

A análise quantitativa demonstra o impacto substancial da orientação da secção transversal na estabilidade global das estruturas porticadas. Ao rotacionar os eixos principais das barras para a configuração de menor inércia, o pórtico apresentou uma drástica redução em sua capacidade resistente à flambagem, decaindo de aproximadamente 51,4 milhões para 11,2 milhões de Newtons. Os gráficos de convergência (Figuras 31 e 32) confirmam que o programa

demonstrou sensibilidade imediata a essa variação paramétrica, estabilizando a carga com poucos elementos e acompanhando o comportamento físico esperado. A validação frente ao software de referência corroborou a precisão do algoritmo numérico, sustentando um erro relativo de no máximo 0,04%. Adicionalmente, atestou-se de forma visual que os modos de flambagem traçados pelo PortPlan em ambos os cenários de inércia correspondem exatamente às elásticas de instabilidade geradas pelo SAP2000.

## 6 CONCLUSÃO

O presente trabalho alcançou com êxito o objetivo proposto de desenvolver e validar uma ferramenta computacional, denominada PortPlan, para a análise de instabilidade elástica de pórticos planos. A formulação, fundamentada no Método da Rigidez Direta (MRD) e implementada sob o paradigma da Programação Orientada a Objetos em linguagem Python, demonstrou ser robusta, eficiente e de fácil manutenção.

A incorporação da matriz de rigidez geométrica ao algoritmo permitiu capturar com precisão a redução da rigidez lateral efetiva causada pelas forças axiais de compressão. Para a resolução do problema de autovalores e obtenção da carga crítica, a adoção do método da bissecção acoplado à verificação de estabilidade por meio da decomposição de Cholesky mostrou-se altamente eficaz, garantindo a convergência numérica sem as instabilidades típicas do cálculo direto de determinantes em matrizes de grande porte. Adicionalmente, o uso da iteração inversa associada ao Método da Penalidade viabilizou a extração clara e precisa dos modos de flambagem da estrutura.

As três etapas de validação atestaram de forma categórica a precisão da ferramenta desenvolvida:

- **No Grupo I (Elementos Isolados):** Os testes confirmaram a aderência do programa às soluções analíticas clássicas de Euler. O estudo de convergência evidenciou que uma discretização de 3 a 4 elementos é suficiente para estabilizar a carga crítica, mitigando eficientemente o fenômeno de rigidez artificial da malha observado em pilares com fortes restrições cinemáticas.
- **No Grupo II (Pórticos Planos):** O avanço para a análise de sistemas maiores comprovou a exatidão do PortPlan na avaliação da estabilidade global frente a diferentes arranjos de vinculação. A comparação quantitativa com o software comercial SAP2000 resultou em desvios máximos ínfimos, da ordem de 0,04%. Ademais, a análise qualitativa atestou que

as configurações deformadas traçadas pelo código desenvolvido correspondem exatamente aos modos de flambagem obtidos no ambiente do SAP2000.

- **No Grupo III (Sensibilidade à Orientação da Inércia):** A investigação comprovou que o programa detecta perfeitamente a variação da rigidez flexional governada pela orientação da secção transversal. A redução drástica da carga crítica foi capturada com um erro relativo máximo de 0,04% frente ao software de referência. Além disso, os modos de flambagem traçados pelo programa nativo reproduziram com fidelidade as elásticas de instabilidade do SAP2000 para ambos os cenários de inércia.

Conclui-se, portanto, que o PortPlan cumpre com rigor os requisitos teóricos e numéricos de um software de análise estrutural linear e de estabilidade elástica. A superação das limitações inerentes aos softwares de código fechado, frequentemente inacessíveis para customização acadêmica, faz com que a ferramenta desenvolvida se posicione como um valioso recurso técnico e didático para facilitar a compreensão profunda dos fenômenos de instabilidade no ensino da engenharia de estruturas.

## 6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Considerando a arquitetura modular e expansível construída para o programa, sugerem-se os seguintes aprimoramentos e linhas de pesquisa para trabalhos futuros:

- Expansão da formulação matricial para englobar as seis variáveis de graus de liberdade espaciais, permitindo a análise tridimensional de pórticos espaciais e grelhas.
- Inclusão de formulações que considerem a não linearidade física dos materiais, possibilitando o estudo do colapso elasto-plástico e da flambagem inelástica em estruturas metálicas e de concreto armado.
- Incorporação de imperfeições geométricas iniciais nas barras do sistema computacional, aproximando a simulação do comportamento divergente observado em estruturas reais.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, F. J. P. d. **Instabilidade Elástica de Pórticos Sujeitos à Cargas Dependentes dos Deslocamentos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1985.
- CHEN, W.-F.; LUI, E. M. **Structural Stability: Theory and Implementation**. New York: Elsevier, 1987.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4th. ed. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- GERE, J. M.; JR., W. W. **Análise de Estruturas Reticuladas**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.
- MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.
- PRZEMIENIECKI, J. S. **Theory of Matrix Structural Analysis**. New York: McGraw-Hill, 1968.
- TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1961.

ANEXO  
DECLARAÇÃO

Declaro para os devidos fins que este Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia/Tese/Dissertação), escrito sob minha orientação, está em versão final, de acordo com as solicitações realizadas pela banca examinadora.

Informo também que procedi à revisão final do texto, constatando que atende às especificações das normas da ABNT para apresentação de trabalhos acadêmicos da UFCA, no que diz respeito ao conteúdo e à formatação.

Data e local da assinatura eletrônica